MATHEMATICAL SCIENCES LIBRARY
3 1761 05552849 1

GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN
SSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN
BAND VI

L. BIEBERBACH
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

11/6

PRESENTED

by

PROF. W.J. WEBBER

1976

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY

A14c
23/722

Deighton, Bell & Co. Ltd.,
Cambridge, Eng.

NOV 2 1976

DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND VI

THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

LUDWIG BIEBERBACH

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VORLESUNGEN AUS DEM
GESAMTGEBIET DER GEWÖHNLICHEN UND DER
PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

LUDWIG BIEBERBACH

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
IN BERLIN

MIT 19 TEXTFIGUREN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY

ALLE RECHTE, INSBESONDERE
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1923 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

Vorwort.

Ein Lehrbuch über Differentialgleichungen zu schreiben, das, wie es ein rechtes Lehrbuch soll, nach allen Seiten hin in die Probleme, den Geist, die Methoden und die Ergebnisse der Theorie einführt, so daß der Leser von da aus jeder Originalarbeit mit Verständnis als etwas nicht allzu fremdem gegenübertreten kann, das scheint eine Unmöglichkeit zu sein.

So ergibt sich von selbst ein Bescheiden und so wird ein einführendes Buch immer nur eine Auswahl aus dem Stoff bringen können. Beeinflußt durch meinen persönlichen Geschmack, habe ich die Auswahl getroffen. Dabei habe ich mich bemüht, nicht Dinge beiseite zu lassen, von deren Pflege auch in unseren Landen Ersprießliches erwartet werden kann. Ein auch in diesem Sinne modernes Buch fehlt auf dem Gebiete der Differentialgleichungen. Daß es nützlich wäre, ein solches zu schreiben, habe ich mir bei der Abfassung des vorliegenden Werkes stets vor Augen gehalten. Ein Blick ins Inhaltsverzeichnis wird des Näheren lehren, wie ich meiner Aufgabe nachzukommen suchte. Wie weit ich sie gelöst habe, mag man nach der Lektüre entscheiden.

Bei der Korrektur verdankte ich freundliche Ratschläge den Herren: *Courant, Kerékjártó, H. Kneser, Knopp, Lettenmeyer, Perron.*

Berlin, April 1923.

L. Bieberbach.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Erster Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

I. Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Die Trennung der Variablen 6
§ 2. Lineare Differentialgleichungen 10
§ 3. Einparametrige Kurvenscharen 12
§ 4. Exakte Differentialgleichungen 14
§ 5. Der integrierende Faktor 15
§ 6. Die *Clairaut*sche Differentialgleichung und Verwandtes 19
§ 7. Ziel und Tragweite der elementaren Integrationsmethoden 22

II. Kapitel.

Die Methode der sukzessiven Approximationen.

§ 1. Das Verfahren der sukzessiven Approximationen 25
§ 2. Die graphische Darstellung der Differentialgleichungen 31
§ 3. Wie beurteilt man die Güte einer Näherung? 34
§ 4. Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen 36
§ 5. Die *Cauchy*sche Polygonmethode 39
§ 6. Integration durch Potenzreihen 41
§ 7. Übertragung der *Simpson*schen Regel 44

III. Kapitel.

Diskussion des Verlaufs der Integralkurven.

§ 1. Elementare Betrachtungen 46
§ 2. Singuläre Punkte 47
§ 3. Die homogene Differentialgleichung $y' = \frac{Ax + By}{Cx + Dy}$ 51
§ 4. Allgemeine Sätze über den Verlauf der Integralkurven im reellen Gebiet 54
§ 5. Die Differentialgleichungen $x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y)$ 63
§ 6. Die Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By + \delta(x, y)}{Cx + Dy + \varepsilon(x, y)}$ 66
§ 7. Über die Verteilung der singulären Stellen 80
§ 8. Singuläre Lösungen 83

IV. Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Feste und bewegliche Singularitäten 90
§ 2. Differentialgleichungen mit eindeutigen Integralen 95
§ 3. Das Verhalten der Integrale in der Nähe der festen singulären Punkte 97

Zweiter Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Die Existenz der Lösungen.

Seite

§ 1. Die Methode der sukzessiven Approximationen 107
§ 2. Geometrische Veranschaulichung 109

II. Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Einige Typen von Differentialgleichungen 112
§ 2. Die Differentialgleichung der Kettenlinie 113
§ 3. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . 116

III. Kapitel.

Diskussion des Verlaufes der Integralkurven.

§ 1. Geschlossene Integralkurven 124
§ 2. Die Lösungskurven linearer Differentialgleichungen 139
§ 3. Randwertaufgaben 149
§ 4. Nähere Betrachtung der Eigenfunktionen von $y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = 0$ . . 152
§ 5. Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen eines Randwertproblems 157
§ 6. Die *Bessel*sche Differentialgleichung $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$ . . . 161
§ 7. Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen 166

IV. Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Lage der Singularitäten der Lösung 168
§ 2. Die Natur der Singularitäten 170
§ 3. Außerwesentliche und wesentliche Singularitäten 173
§ 4. Auflösung einer Differentialgleichung in der Nähe einer außerwesentlichen singulären Stelle 176
§ 5. Anwendung auf die *Bessel*sche Differentialgleichung 183
§ 6. Differentialgleichungen der *Fuchs*schen Klasse 184
§ 7. Die hypergeometrische Differentialgleichung 187
§ 8. Analytische Fortsetzung einer einzelnen Lösung 190
§ 9. *Legendre*sche Polynome 197

Dritter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 1. Einige allgemeine Betrachtungen 201
§ 2. Lineare Differentialgleichungen 203
§ 3. Die allgemeine Gleichung erster Ordnung 209
§ 4. Über die Integration der Differentialgleichungen für charakteristische Streifen 217
§ 5. Systeme von partiellen Differentialgleichungen 222
§ 6. Das vollständige Integral 225

Seite
§ 7. Integration einiger spezieller Differentialgleichungen 228
§ 8. Differentialgleichungen, in welchen die unbekannte Funktion nicht explizite vorkommt 230
§ 9. Anwendung in der Mechanik 231
§ 10. Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen . . . 235
§ 11. Verallgemeinerung auf den Fall von n unabhängigen Veränderlichen 249

Vierter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Allgemeines.

§ 1. Existenzsatz 265
§ 2. Charakteristiken 271
§ 3. *Monge-Ampère*sche Differentialgleichungen 273
§ 4. Lineare Differentialgleichungen 278

II. Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen.

§ 1. Die *Laplace*sche Kaskadenmethode 279
§ 2. Die *Riemann*sche Integrationsmethode 280
§ 3. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite 286

III. Kapitel.

Elliptische Differentialgleichungen.

§ 1. Die *Green*sche Formel 289
§ 2. Die erste Randwertaufgabe beim Kreis 292
§ 3. Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ 299
§ 4. Verallgemeinerungen 310

IV. Kapitel.

Parabolische Differentialgleichungen.

§ 1. Existenz und Unität der Lösungen 311
§ 2. Der lineare begrenzte Leiter 314
§ 3. Der unbegrenzte Leiter 315

Namenverzeichnis 318

Sachverzeichnis 319

Einleitung.

Unter einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* versteht man eine Beziehung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

zwischen einer Funktion $y(x)$ der einen Variablen x und den Ableitungen dieser Funktion. Wenn Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich vorkommen, so spricht man von einer *Differentialgleichung n-ter Ordnung*. So ist also z. B.

$$\frac{dy}{dx} - x - y = 0$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

dagegen ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Benennung Ordnung bezieht sich also auf die Höchstordnung der vorkommenden Ableitungen und ist nicht mit dem für einige Differentialgleichungen noch zu erklärenden Begriff des Grades zu verwechseln. Wir werden z. B.

$$\frac{dy}{dx} - x - y = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$$

linear oder vom ersten Grad nennen, weil links eine lineare Funktion von $y' = \frac{dy}{dx}$ und y steht. Das Adjektiv *gewöhnlich* bezieht sich darauf, daß es sich um Funktionen $y(x)$ *einer* Variablen x handelt. Es setzt diese Differentialgleichungen in Gegensatz zu den *partiellen*, bei welchen es sich um Funktionen von zwei oder mehr Variablen handelt. So ist also z. B.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^x$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Es kann auch vorkommen, daß ein *System* von mehreren Differentialgleichungen für mehrere Funktionen *einer* Variablen vorgelegt ist. Immer aber ist die Aufgabe der Theorie darin zu sehen, *die Eigenschaften derjenigen Funktionen zu ermitteln, welche einer vorgelegten Differentialgleichung oder einem System von Differentialgleichungen genügen. Die geringste Forderung ist es, einen expliziten Ausdruck für diese Funktionen zu finden. Wichtiger ist es, herauszubekommen, wie der funktionentheoretische Charakter, also z. B. der Verlauf des Kurvenbildes der lösenden Funktionen, von den Eigenschaften der Differentialgleichung abhängt und aus denselben bestimmt werden kann. Es erhebt sich die Frage, wie unter mehreren Lösungen eine mit gegebenen Eigenschaften zu finden ist, es handelt sich darum, den numerischen Verlauf einer als vorhanden erkannten Lösung zu finden,* und viele ähnliche Aufgaben werden der Theorie vom mathematischen Grübelgeist, vom Interesse des physikalischen, chemischen, astronomischen oder technischen Praktikers gestellt. *Allen diesen allerverschiedensten Aufgaben muß eine Theorie der Differentialgleichungen Rechnung tragen. Sie hat die Aufgaben zu klassifizieren und die Mittel zu ihrer Bewältigung bereitzustellen, so daß jeder Spezialfall dann nur noch eine mehr oder weniger große Einzelarbeit verlangt.*

Unsere nächste Aufgabe wird es sein, die einfachsten *Differentialgleichungen erster Ordnung* zu untersuchen. Sie sollen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sein. Dabei sei $f(x,y)$ in einem gewissen Bereich der x-y-Ebene als eindeutige und stetige Funktion gegeben[1]).

Unter einer *Lösung* oder einem *Integral* einer Differentialgleichung verstehen wir irgendeine der Differentialgleichung genügende, also differenzierbare Funktion. Ihr geometrisches Bild heißt Integralkurve.

Wir wollen uns an Hand einer *geometrischen Deutung* zunächst eine ungefähre Vorstellung über die zu erwartenden Ergebnisse verschaffen.

Das geometrische Bild einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung ist ein *Richtungsfeld.* Die Differentialgleichung erlaubt es nämlich, in jedem Punkt des Definitionsbereiches von $f(x,y)$ die Ableitung der gesuchten Funktion, d. i. die Steigung der gesuchten Kurven zu berechnen. Wir können uns dieselben in jedem Punkt durch ein Geradenstück markiert denken, welches die verlangte Rich-

[1]) Wegen der Begriffe „Bereich" und „stetige Funktionen von zwei Variablen" vgl. man z. B. meinen Leitfaden der Differentialrechnung, 2. Aufl., auf S. 115 und auf S. 116.

tung hat[1]). Fig. 1 veranschaulicht das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Man kann natürlich nicht in jedem Punkt, aber doch in einigen, die Richtungen markieren und so schon eine gewisse Vorstellung über den Verlauf der Lösungen erlangen. Man kann dazu offenbar in jedem Punkt des Bereiches beginnen, von da ein Stück Weges in der verlangten Richtung gehen bis zu einem Nachbarpunkt. Man wird dort wieder die verlangte Richtung einschlagen[2]) bis zu einem Nachbarpunkt, dort wieder zu der veränderten neuverlangten Richtung übergehen usw. So bekommt man etwa das Bild der Fig. 2. Man wird so durch jeden Punkt des Bereiches voraussichtlich eine Kurve finden.

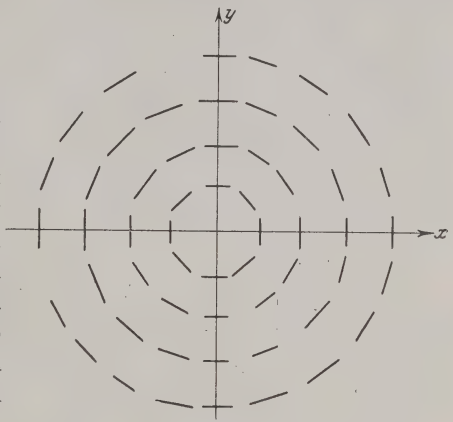

Fig. 1.

Gegen die Überlegung kann man einwenden, daß man ja eigentlich schon sofort nach dem Verlassen des ersten Punktes die Richtung ändern müßte, nicht erst nach einer Weile, wenn anders die gefundene Kurve überall die verlangte Richtung einhalten soll. Doch kann man sich mit der — später durch einen bündigen Schluß zu bestätigenden — Vorstellung trösten, daß man sicher eine gewisse Annäherung an die wirkliche Lösungskurve erhalten wird, wenn man nur nie zu lange ein und dieselbe Richtung einhält. Eine gewisse Stütze kann ja auch diese Hoffnung schon vorläufig in einer Reminiszenz aus der Integralrechnung finden.

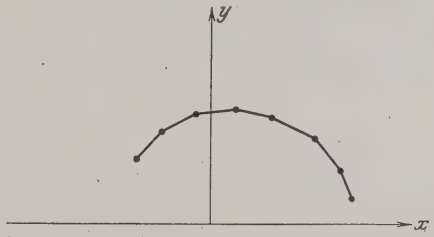

Fig. 2.

[1]) Den Inbegriff eines Punktes und eines durch ihn gehenden Geradenstückes, also analytisch das Zahlentripel (x, y, y') nennen wir *Linienelement*.

[2]) Es könnte zweifelhaft sein, in welcher der beiden möglichen Richtungen man die Tangente im neuen Punkt zu verfolgen hat. Indessen ist es doch klar, daß man so vorgehen wird, daß entweder die Abszissen x *ständig* wachsen oder *ständig* abnehmen. Nimmt man auf diese Vorschrift Rücksicht, so kann man nie im Zweifel sein, wie man weitergehen wird.

Betrachten wir nämlich den speziellen Fall

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

so haben wir es gerade mit der Grundaufgabe der Integralrechnung zu tun und wir wissen, daß dort tatsächlich die Näherungskurven bei fortgesetzter Verfeinerung des Verfahrens gegen das Integral konvergieren. Die einzelnen Näherungen sind ja weiter nichts, als die geometrischen Bilder der Näherungssummen, welche man bei der Definition des bestimmten Integrales zu benutzen pflegt. Ersetzt man nämlich die Kurve des Integranden durch ein Treppenpolygon und zeichnet die Integralkurve dieses Treppenpolygons, so hält diese Gerade in den einzelnen Teilintervallen je eine feste Richtung ein. Diese bei der „graphischen Integration" benutzen Kurven sind es, die als einfacher Spezialfall dessen auftreten, was wir auch bei den Differentialgleichungen antrafen.

Wir wollen aus unserer Überlegung die Vermutung entnehmen, *daß durch jeden Punkt unseres Bereiches genau eine Integralkurve der Differentialgleichung gehen muß, oder analytisch ausgedrückt, daß es genau eine der Differentialgleichung genügende differenzierbare Funktion* $y(x)$ *gibt, die für* $x = x_0$ *den gegebenen Wert* $y = y_0$ *annimmt, vorausgesetzt, daß der Punkt mit den Koordinaten* x_0, y_0 *dem gegebenen Bereiche angehört, in welchem* $f(x, y)$ *gewisse noch näher anzugebende Eigenschaften besitzt.*

Wir wenden uns nun dazu, in einigen Fällen auf einem ersten primitiven Wege die Lösungen einer vorgelegten Differentialgleichung wirklich alle anzugeben. Wir werden dann stets das eben Gefundene bestätigt finden, wie denn auch für

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

die gewünschte Lösung bekanntlich durch

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0$$

gegeben ist.

Man kann sich auch in dem vorhin gewählten Beispiel, losgelöst von jeder allgemeinen Methode[1]), leicht davon überzeugen, daß unsere Vermutung zutrifft. Denn da die Integralkurve den Punkt (x, y) mit der Steigung $-\frac{x}{y}$ passiert, muß sie nach den Regeln der analytischen Geometrie auf der Verbindungsgeraden dieses Punktes mit dem Ko-

[1]) Wir werden bald eine solche auf unsere Differentialgleichung anwendbare Methode kennen lernen.

ordinatenursprung[1]) senkrecht stehen. Da sie also jeden ihrer Punkte in derselben Richtung passiert, die auch der durch diesen Punkt gehende, im Koordinatenursprung zentrierte Kreis einschlägt, so sind also die Kreise solche Kurven, welche überall die verlangte Richtung besitzen. Durch

$$x^2 + y^2 = r^2$$

müssen also Lösungskurven dargestellt sein. Man rechnet leicht nach, daß die aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

gewonnenen Funktionen tatsächlich der Differentialgleichung genügen. Denn differenziert man die Gleichung nach x, so hat man

$$x + yy' = 0\,.$$

Also ist wirklich

$$y' = -\frac{x}{y}\,.$$

Daß unsere Näherungskonstruktion eine gewisse Annäherung an die Kreise liefert, wird man nicht verkennen. Übrigens springen sie ja in Fig. 1 recht deutlich in die Augen.

---

[1]) Deren Richtungstangens ist ja $\frac{y}{x}$, so daß das Produkt der beiden Steigungen tatsächlich -1 ist.

Erster Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

I. Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Die Trennung der Variablen.

Wir wollen die Methode zunächst an der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$$

darlegen. Die Methode geht von der — zunächst unbewiesenen — Annahme aus, daß diese Gleichung Lösungen besitzt. Denkt man sich dann für y eine der Lösungen der Gleichung eingesetzt, so muß die Gleichung

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

identisch in x gelten. Namentlich muß also das Integral der linken Seite dem der rechten gleich sein. Das liefert

$$\int_{x_0}^{x} y\frac{dy}{dx}\,dx = \frac{x_0^2 - x^2}{2}.$$

Das Integral linker Hand wird durch die Substitutionsmethode berechnet, indem man durch $y = y(x)$ als neue Integrationsvariable y selbst einführt. Setzt man $y(x_0) = y_0$, so findet man

$$\frac{y^2 - y_0^2}{2} = \frac{x_0^2 - x^2}{2}.$$

Setzt man dann $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, so hat man in

$$x^2 + y^2 = r^2$$

eine algebraische Gleichung, welcher die gesuchte Lösung genügen muß.

Umgekehrt sieht man auch leicht, daß jede dieser Gleichung genügende Funktion $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Damit ist dann der anfänglich noch ausstehende Beweis für die Existenz der Lösungen nachträglich erbracht.

Bemerkung: Alle in diesem Kapitel zu besprechenden Methoden gehen von der Annahme aus, daß Lösungen existieren, und jedesmal kann dieser Beweis dadurch nachgetragen werden, daß man hinterher verifiziert, daß die gefundene Lösung tatsächlich der Differentialgleichung genügt. Wir wollen aber diese eintönigen Verifikationen in der Folge weder durchführen noch erwähnen, zumal wir auch im folgenden einen allgemeingültigen Beweis für die Existenz der Lösungen kennen lernen werden.

Eine Differentialgleichung gilt stets dann als gelöst oder, wie man auch sagt, als *integriert*, wenn es gelungen ist, eine Lösungskurve durch einen beliebig gewählten Punkt des zugrunde gelegten Bereiches zu finden. Das ist in unserem Beispiel der Fall. Verlangt man nämlich einen Kreis durch den Punkt (x_0, y_0) der oberen oder der unteren Halbebene, so muß man nur $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ setzen.

Die eben dargelegte Methode bleibt stets anwendbar, wenn die vorgelegte Differentialgleichung die Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\varphi(y)}$$

besitzt. Dabei möge $f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$, $\varphi(y)$ dagegen im Intervall $\alpha \leqq y \leqq \beta$ stetig erklärt sein. $\varphi(y)$ soll daselbst überdies von Null verschieden sein[1]). Der Bereich, in dem wir die Differentialgleichung studieren, ist dann das Rechteck $a \leqq x \leqq b$, $\alpha \leqq y \leqq \beta$. Man kann die Gleichung so schreiben:

$$\varphi(y)\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Denkt man sich wieder für y irgendeine bestimmte Lösung eingesetzt, so kann man wie oben integrieren, und findet

$$\int_{y_0}^{y} \varphi(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

als eine Gleichung für diejenige Lösung, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Wenn die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(y)$ nicht zu kompliziert sind, wird man nun mit der weiteren Untersuchung der Lösung keine Schwierigkeiten mehr haben. In komplizierteren Fällen kann es aber geschehen, daß mit diesen einfachen Schritten erst die geringste Arbeit geleistet ist. Ein solcher Fall tritt z. B. dann ein, wenn in einem Punkt (x_0, y_0) des Rechtecks $f(x_0) = \varphi(y_0) = 0$ ist.

---

[1]) Nullstellen von $\varphi(y)$ werden der Behandlung zugänglich, wenn man x und y vertauscht. So müssen nur die Stellen x_0, y_0 außer Betracht bleiben, wo $f(x_0) = \varphi(y_0) = 0$ ist. Solche „singuläre“ Stellen werden uns später näher beschäftigen.

Häufig tritt der Fall ein, daß erst nach Einführung einer neuen unbekannten Funktion oder nach Einführung einer neuen unabhängigen Variablen der eben eingeschlagene Weg gangbar wird. So hat z. B.

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

nicht die bisher zugrunde gelegte Form. Wählt man aber

$$v = x + y$$

als neue unbekannte Funktion, so wird die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = v + 1.$$

Nun können die Variablen getrennt werden. Man findet dann

$$\log \frac{v+1}{v_0+1} = x - x_0$$

oder

$$v = -1 + (v_0 + 1)\, e^{x-x_0}.$$

Also wird

$$y = -x - 1 + (1 + x_0 + y_0)\, e^{x-x_0}.$$

Dabei ist noch $v_0 = x_0 + y_0$ gesetzt. Tatsächlich stellt diese Gleichung eine Funktion dar, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt.

Durch die gleiche Substitution werden bei allen Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x + y)$$

die Variablen trennbar.

Ähnlich behandelt man $y' = f(\alpha x + \beta y)$.

Es gibt eine weitere ziemlich umfassende wichtige Klasse von Differentialgleichungen, in welchen sich durch eine einfache Substitution die Variablen trennen lassen. Ich meine die *homogenen Differentialgleichungen*. Sie haben die Form:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Hier hilft die Substitution

$$v = \frac{y}{x},$$

durch die v als neue unbekannte Funktion eingeführt wird. Die Differentialgleichung wird dann

$$v' x + v = f(v)$$

oder

$$v' = \frac{f(v) - v}{x}.$$

Die Variablen sind also getrennt. Will man aber hier die Methode von S. 7 verwenden, so muß man durch $f(v) - v$ dividieren und also neben $x \neq 0$ auch $f(v) - v \neq 0$ voraussetzen. Dadurch gehen aber gewisse Lösungen der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ verloren. Wenn

nämlich die Zahl α der Gleichung $f(\alpha) - \alpha = 0$ genügt, so ist $y = \alpha x$ eine Lösung jener homogenen Gleichung.

In wieder anderen Fällen führen andere Substitutionen auf eine homogene Differentialgleichung. Führt man z. B. in

$$(x - y^2) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$v = y^2$ ein, so erhält man die homogene Gleichung

$$1 - \frac{v}{x} + \frac{dv}{dx} = 0.$$

Auf homogene Differentialgleichungen lassen sich im allgemeinen auch die folgenden zurückführen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By + C}{ax + by + c}.$$

Falls nämlich $C = 0$ und $c = 0$ ist, so ist die Gleichung bereits homogen. Durch eine passende Transformation kann man aber diese Gestalt herstellen. Der Gedanke ist der: Man betrachte die beiden Geraden

$$Ax + By + C = 0, \quad ax + by + c = 0.$$

Man bringe durch eine passende Verschiebung des Koordinatensystems, also durch eine Substitution der Form:

$$x = u + h, \quad y = v + k$$

den Schnittpunkt der beiden Geraden in den Koordinatenanfang. Das geht immer, wenn die beiden Geraden nicht parallel sind. Dieser Fall werde also zunächst ausgeschlossen.

Durch die Substitutionsgleichungen wird also sowohl eine neue Variable wie eine neue unbekannte Funktion eingeführt. Man findet leicht, daß

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$$

ist. Die Substitution liefert also zunächst

$$\frac{dv}{du} = \frac{Au + Bv + (Ah + Bk + C)}{au + bv + (ah + bk + c)}.$$

Hier sind dann die h, k aus den beiden Gleichungen

$$Ah + Bk + C = 0, \quad ah + bk + c = 0$$

zu bestimmen. Diese sind lösbar, weil die beiden Geraden nicht parallel sein sollen. Die transformierte Gleichung ist dann homogen.

Wenn aber die beiden Geraden parallel sind, so kann man die Gleichung *nicht* auf eine homogene Gleichung zurückführen, aber man kann für $b \neq 0$ die Differentialgleichung so schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{B}{b}(ax + by + c) + C - \frac{Bc}{b}}{ax + by + c}.$$

Dann führe man durch

$$v = ax + by + c$$

eine neue unbekannte Funktion v ein. Die Gleichung wird dann

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right) = \frac{\frac{B}{b}v + C - \frac{Bc}{b}}{v}$$

oder

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(B+a)v + Cb - Bc}{v}.$$

Dabei ist angenommen, daß $b \neq 0$ sei. Der Fall $b = 0$ erledigt sich ja von selbst.

§ 2. Lineare Differentialgleichungen.

Die linearen Differentialgleichungen haben die Gestalt

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0.$$

Die Koeffizienten $f(x)$ und $\varphi(x)$ mögen in einem Intervall stetig erklärt sein. Zur Integration der linearen Differentialgleichungen führt der Ansatz $y = u \cdot v$, durch den zwei Hilfsfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ eingeführt werden. Die Gleichung wird dann

$$u(v' + fv) + u'v + \varphi = 0.$$

Nun bestimme man v aus der Gleichung:

(1) $$v' + f(x)v = 0.$$

Dann bleibt für u:

$$u'v + \varphi = 0.$$

In beiden Gleichungen können dann die Variablen getrennt werden. Man findet

$$v = v_0 e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}.$$

Daher wird

$$u = -\frac{1}{v_0}\int_{x_0}^{x} \varphi(x) e^{+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}\,dx + u_0.$$

So hat man schließlich:

$$y = v_0 e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}\left\{u_0 - \frac{1}{v_0}\int_{x_0}^{x} \varphi(x) e^{+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}\,dx\right\}.$$

Dann wird

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}\left\{y_0 - \int_{x_0}^{x} \varphi(x) e^{+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}\,dx\right\}$$

das Integral unserer Differentialgleichung, welches für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt.

Wir wollen die Integration der linearen Gleichung noch etwas anders darstellen. Zwar ist es im Grunde genau das Gleiche, doch wollen wir die Gelegenheit benutzen, um an einem einfachen Beispiel die *Methode der Variation der Konstanten* kennen zu lernen. Wenn in der Gleichung

$$y' + f(x)\,y + \varphi(x) = 0$$

$\varphi(x) \equiv 0$, die Gleichung also, wie man sagt, *homogen*[1]) wäre, so wären die Variablen getrennt und man fände als allgemeines Integral

$$y = c\,e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}.$$

Dabei ist c eine beliebige Konstante[2]), die Integrationskonstante. Der Grundgedanke der neuen Methode ist es nun, in die inhomogene Gleichung

$$y' + f(x)\,y + \varphi(x) = 0,$$

in der also nun $\varphi(x)$ nicht identisch verschwindet, mit dem Ansatz

$$y = c(x)\,e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}$$

hineinzugehen, also die Konstante in $c(x)$ zu variieren, d. h. durch eine noch zu bestimmende *Funktion* von x zu ersetzen. (Man erkennt jetzt wieder das Produkt von zwei Funktionen, das bei der ersten Darstellung den Ausgang bildete.) Man findet dann

$$c' \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx} + \varphi(x) = 0$$

und berechnet daraus $c(x)$. Leicht findet man dann die schon vorhin angegebene Auflösungsformel wieder.

Auf die linearen Gleichungen läßt sich die *Bernoulli*sche Differentialgleichung

$$y' + f(x)\,y + \varphi(x)\,y^n = 0 \quad (n \neq 1)$$

zurückführen. Man hat sie nur so zu schreiben:

$$y^{-n} \cdot y' + y^{1-n} f(x) + \varphi(x) = 0,$$

---

[1]) Das Wort homogen wird also jetzt in anderem Sinne gebraucht als bei den Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

auf S. 8. Jetzt bezieht es sich darauf, daß die linke Seite eine homogene Funktion von y' und y ist, während es sich früher darauf bezog, daß die rechte Seite eine homogene Funktion von x und y war. Vorhin war überdies die homogene Funktion von nullter Dimension, jetzt ist sie von erster Dimension.

[2]) Sie war vorhin mit v_0 bezeichnet.

um zu erkennen, daß die Substitution $v = y^{1-n}$ auf die lineare Gleichung

$$\frac{1}{1-n} v' + v \cdot f(x) + \varphi(x) = 0$$

führt.

Oft erweist es sich als nützlich, von der Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $y(x)$ zur Differentialgleichung für die Umkehrungsfunktion $x(y)$ überzugehen. Ist nämlich $x(y)$ bestimmt, so ist natürlich damit auch implizite $y(x)$ bekannt; jedenfalls sind zu seiner Bestimmung keine Differentialgleichungen mehr zu lösen. Oft ist aber die Differentialgleichung der Umkehrungsfunktion leichter angreifbar.

Wenn z. B. die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}(x^2 \sin y - yx) = 1$$

vorgelegt ist, so wird daraus

$$\frac{dx}{dy} + yx - \sin y \cdot x^2 = 0.$$

Das ist eine *Bernoulli*sche Gleichung für x, die wir integrieren können.

§ 3. Einparametrige Kurvenscharen.

In einem Bereich B sei die Funktion $\psi(x, y)$ eindeutig und stetig erklärt. Ihre Werte im Bereich B erfüllen dann eine gewisse Strecke einer Zahlengeraden, der c-Achse. Versteht man dann unter c irgendeinen Wert aus diesem Intervall, so definiert die Gleichung

$$\psi(x, y) = c$$

eine Kurve des Bereichs B. Kurven, die zu verschiedenen c-Werten gehören, schneiden sich nicht im Bereiche B, weil in diesem Bereich $\psi(x, y)$ eine eindeutige Funktion ist. Die Gesamtheit dieser Kurven bildet eine einparametrige Kurvenschar, c heißt der Parameter der Schar. Eine solche Schar kann auch durch eine Gleichung der Form

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

definiert sein. Es wird dann im allgemeinen nicht zu jedem x-y-Paar nur ein c-Wert gehören. Es werden vielmehr im allgemeinen durch jeden Punkt des Bereiches B mehrere Kurven der Schar gehen. Die Auflösung

$$c = \psi(x, y)$$

ergibt dann eine mehrdeutige Funktion $\psi(x, y)$, z. B. die mit zwei Vorzeichen wählbare Quadratwurzel. Wir wollen voraussetzen, daß $\varphi(x, y, c)$ in einem gewissen Gebiete G der x, y, c eine eindeutige stetige Funktion von x, y, c ist, die stetige partielle Ableitungen nach x, nach y und nach c besitzt; $\frac{\partial \varphi}{\partial c}$ sei von Null verschieden. In der Um-

gebung eines jeden solchen der Gleichung $\varphi(x, y, c) = 0$ genügenden Wertetripels x_0, y_0, c_0 werden dann die bekannten Sätze über implizite Funktionen verwendbar, und man hat daher in der Umgebung einer jeden solchen Stelle (x_0, y_0) eine oder mehrere eindeutige und stetige Auflösungen

$$c = \psi(x, y).$$

Wir setzen nun weiter voraus, daß $\psi(x, y)$ mit stetigen ersten Ableitungen versehen sei. Dann gilt der Satz:

Die Kurven einer jeden einparametrigen Kurvenschar genügen einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wenn man nämlich die Gleichung

$$c = \psi(x, y)$$

nach x differenziert, so bekommt man

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

und dies ist schon die gewünschte Beziehung zwischen x, y, y' der durch unsere Gleichung dargestellten Kurven.

Ist die Schar in der allgemeinen Form

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

gegeben, so wird analog

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminiert man dann c aus diesen beiden letzten Gleichungen, so erhält man die gewünschte Differentialgleichung.

Zwei Beispiele werden die Dinge vollends klarlegen.

Die Tangenten einer Kurve

$$\eta = f(\xi)$$

machen eine solche einparametrige Kurvenschar

$$y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

aus. ξ ist der Parameter der Schar. Differenziert man nach x, so findet man natürlich

$$y' = f'(\xi)$$

für die Richtung der Tangenten. Nun hat man ξ aus beiden Gleichungen zu eliminieren, wenn man nicht die beiden Gleichungen

$$y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$
$$y' = f'(\xi)$$

etwa als eine Parameterdarstellung der Differentialgleichung selbst ansehen will. Tatsächlich werden wir uns später mit Differentialgleichungen befassen, die in dieser Form gegeben sind oder auf diese Form gebracht werden können.

Wenn z. B.

$$\eta = \xi^2$$

die vorgelegte Kurve ist, so hat man

$$y = \xi^2 + 2\xi(x - \xi)$$

und

$$y' = 2\xi.$$

So erhält man die Differentialgleichung

$$y = \frac{y'^2}{4} + y'\left(x - \frac{y'}{2}\right) \quad \text{oder} \quad y'^2 - 4xy' + 4y = 0$$

der Parabeltangenten.

Durch

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ist die Schar der konzentrischen Kreise gegeben. Also wird

$$x + yy' = 0$$

die Differentialgleichung der Schar.

Ebenso wird

$$2yy' - 1 = 0$$

die Differentialgleichung der Parabelschar

$$y^2 = x + C.$$

§ 4. Exakte Differentialgleichungen.

Die Bemerkungen des vorigen Paragraphen führen uns zu einer weiteren Integrationsmethode.

Wenn nämlich die Koeffizienten $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ einer Differentialgleichung $P + Qy' = 0$ der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

genügen — solche Differentialgleichungen heißen *exakt* —, so gibt es nach bekannten Sätzen der Integralrechnung eine Funktion $\varphi(x, y)$, deren Ableitungen P und Q sind. Dann besagt aber die Differentialgleichung, die man dann in der Form

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

schreiben kann, weiter nichts, als daß längs einer jeden Integralkurve der Differentialgleichung die Funktion $\varphi(x, y)$ einen festen Wert annimmt. Dann wird also $\varphi(x, y) = C$ die Schar der Integralkurven.

Wenn z. B. die Gleichung

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

vorliegt, eine homogene lineare Gleichung, die man auch nach S. 10

behandeln könnte, so ist sicher die Integrabilitätsbedingung für die Koeffizienten erfüllt. Man berechnet dann bekanntlich die Funktion $\varphi(x, y)$ so: Da die x-Ableitung von φ den Wert x^2 besitzt, so findet man

$$\varphi = \int x^2 dx + \psi(y) = \frac{x^3}{3} + \psi(y).$$

Hier bedeutet $\psi(y)$ eine Funktion von y, die nun aus der Bedingung zu bestimmen ist, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2$$

sein soll. Das liefert aber

$$\psi'(y) = y^2.$$

Also wird

$$\psi(y) = \frac{y^3}{3} + c.$$

So finden wir

$$\varphi = \frac{x^3 + y^3}{3} + c.$$

Daß die Ableitungen dieser Funktion die richtigen Werte haben, bestätigt man leicht. So sind also

$$x^3 + y^3 = C$$

die Lösungen unserer Differentialgleichung. Wünscht man insbesondere die Integralkurve durch den Punkt $x_0 y_0$, so wird

$$x^3 + y^3 = x_0^3 + y_0^3$$

deren Gleichung.

§ 5. Der integrierende Faktor.

Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

nicht der Integrabilitätsbedingung genügen, so kann man doch hoffen dieselbe durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion $M(x, y)$, die man *Multiplikator* oder auch *integrierender Faktor* nennt, in eine exakte Differentialgleichung zu verwandeln. Denn wenn man annimmt, daß die Differentialgleichung Lösungen besitzt, und daß die Schar ihrer Lösungskurven durch

$$\varphi(x, y) = c$$

gegeben ist, so muß die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

gebracht werden können. Daher muß

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

sein. Daraus folgt

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{Q}.$$

Setzt man den gemeinsamen Wert dieser beiden Quotienten gleich $M(x, y)$, so findet man, daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = MP, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = MQ$$

ist, daß also tatsächlich die Differentialgleichung

$$MP + MQ\frac{dy}{dx} = 0$$

exakt ist. Wie kann man nun aber eine solche Funktion M wirklich bestimmen? Da die Funktionen MP und MQ der Integrabilitätsbedingung genügen müssen, so findet man für M die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial (MP)}{\partial y} = \frac{\partial (MQ)}{\partial x}.$$

Man kann sie auch so schreiben:

$$P\frac{\partial M}{\partial y} - Q\frac{\partial M}{\partial x} + M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Man mag geneigt sein, die Integration dieser partiellen Differentialgleichung für schwieriger zu halten, als die der ursprünglich vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichung. Indessen muß man bedenken, daß man für unsere Zwecke nur irgend eine, lange nicht die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung braucht. Und tatsächlich ist es oft leicht, aus dem bloßen Anblick der Gleichung eine ihrer Lösungen zu finden. Einige Beispiele mögen dies klarlegen.

Wenn etwa

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

nur von x abhängt, so kann man der partiellen Differentialgleichung durch eine Funktion genügen, die nur von x abhängt. Denn macht man die Annahme

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

so reduziert sich die partielle Differentialgleichung auf

$$Q\frac{\partial M}{\partial x} = M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

oder

$$\frac{M'}{M} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Daraus findet man sofort

$$M = e^{\int^x \frac{P_y - Q_x}{Q}\, dx}.$$

Die linearen Differentialgleichungen können z. B. auf diese Weise integriert werden. Doch sind dies natürlich nicht die allgemeinsten hierher gehörigen Differentialgleichungen. Denn auch

$$y + xy + \sin y + (x + \cos y)\frac{dy}{dx} = 0$$

kann so integriert werden. Ein Multiplikator ist e^x. Das allgemeine Integral wird

$$e^x(xy + \sin y) = c.$$

Manchmal kann man Vorteil aus der Kenntnis des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Multiplikatoren ein und derselben Differentialgleichung ziehen.

Wenn nämlich $M(x, y)$ ein Multiplikator, und $f(x, y) = c$ das allgemeine Integral[1]*) einer gewöhnlichen Differentialgleichung sind, so ist auch $M \cdot f$ ein Multiplikator.* Denn man rechnet nach:

$$\frac{\partial(Mf\,P)}{\partial y} - \frac{\partial(Mf\,Q)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}MP - \frac{\partial f}{\partial x}MQ + f\frac{\partial(MP)}{\partial y} - f\frac{\partial(MQ)}{\partial x}$$

$$= MP\frac{\partial f}{\partial y} - MQ\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{wegen} \quad \frac{\partial(MP)}{\partial y} - \frac{\partial(MQ)}{\partial x} = 0$$

$$= -MQ\left(\frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{wegen} \quad MP + MQ\frac{dy}{dx} = 0$$

$$= 0 \quad \text{wegen} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Da weiter das allgemeine Integral auch in der Form

$$\varphi(f) = c$$

geschrieben werden kann, wenn man unter $\varphi(w)$ eine willkürliche differenzierbare Funktion versteht, so ergibt sich, daß auch

$$M \cdot \varphi(f)$$

ein Multiplikator ist.

Wenn umgekehrt der Quotient zweier Multiplikatoren M_1 und M_2 nicht von x und y unabhängig ist, so stellt

$$\frac{M_1}{M_2} = c$$

[1]) Vorbehaltlich einer späteren schärferen Begriffsbestimmung werde unter einem allgemeinen Integral irgend eine einparametrige Schar von Integralen der Differentialgleichung verstanden.

das allgemeine Integral der Differentialgleichung dar. Wenn nämlich

$$\frac{df}{dx} = M_1 P + M_1 Q \frac{dy}{dx}$$

und

$$\frac{d\varphi}{dx} = M_2 P + M_2 Q \frac{dy}{dx}$$

gilt, so stellen sowohl

$$f(x, y) = c \quad \text{wie} \quad \varphi(x, y) = C$$

das allgemeine Integral dar. Längs einer jeden Integralkurve haben also sowohl f wie φ konstante Werte. Die Werte von φ sind also bekannt, wenn man die von f kennt. Daher kann φ als Funktion von f dargestellt werden. Nun hat man aber

$$\frac{d\varphi}{df} = \frac{M_2 (P + Q y')}{M_1 (P + Q y')} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Da aber weiter, wie wir eben sahen,

$$\varphi = F(f)$$

ist, so ist auch

$$\frac{d\varphi}{df} = F'(f).$$

Daher ist wirklich

$$\frac{M_2}{M_1} = F'(f) = c$$

das allgemeine Integral.

Man kann von diesen Bemerkungen auch auf die folgende Weise zur Integration von Differentialgleichungen Gebrauch machen. Es sei etwa ein Multiplikator von

$$(y^3 + x) + (x^3 + y) y' = 0$$

zu bestimmen. Wir schreiben die Differentialgleichung so:

$$(y^3 + x^3 y') + (x + y y') = 0.$$

Betrachtet man dann erst einmal die beiden Differentialgleichungen

$$y^3 + x^3 y' = 0 \qquad \text{und} \qquad x + y y' = 0$$

gesondert für sich, so ist man leicht in der Lage, die sämtlichen Multiplikatoren einer jeden derselben zu bestimmen. Die erste besitzt den Multiplikator $x^{-3} y^{-3}$ und $x^{-2} + y^{-2} = c$ ist ihr allgemeines Integral. Also ist

$$x^{-3} y^{-3} F(x^{-2} + y^{-2})$$

der allgemeinste Multiplikator der ersten Gleichung. Ein Multiplikator der zweiten ist 1 und $x^2 + y^2 = c$ ist ihr allgemeines Integral.

Also ist

$$f(x^2 + y^2)$$

ihr allgemeinster Multiplikator. *Wenn es nun gelingt, eine Funktion zu finden, die als Multiplikator der beiden Differentialgleichungen zugleich brauchbar ist, so ist dieselbe auch ein Multiplikator der ur-*

sprünglich gegebenen Differentialgleichung. Es kommt also darauf an, der Bedingung

$$x^{-3}y^{-3}F(x^{-2}+y^{-2}) = f(x^2+y^2)$$

zu genügen. Man sieht leicht, daß es hinreicht

$$f(x^2+y^2) \equiv (x^2+y^2)^{-3/2} \quad \text{und} \quad F(x^{-2}+y^{-2}) \equiv (x^{-2}+y^{-2})^{-3/2}$$

zu wählen. Daher ist

$$(x^2+y^2)^{-3/2}$$

ein Multiplikator der gegebenen Differentialgleichung. Man bestätigt dies leicht.

§ 6. Die *Clairaut*sche Differentialgleichung und Verwandtes.

Die Differentialgleichungen

$$y = f(x,\ y')$$
$$y = f(y')$$
$$x = f(y')$$
$$x = f(y,\ y')$$

werden am zweckmäßigsten dadurch behandelt, daß man

$$y' = p$$

als neue unbekannte Funktion einführt. Kennt man nämlich erst einmal y' als Funktion von x, so setze man diese nur in die gegebene Differentialgleichung, um damit eine Gleichung zwischen x und y allein zu erhalten. Man verifiziert dann, daß sie ein Integral der Differentialgleichung liefert. Den Verlauf des Verfahrens wollen wir uns jetzt am Beispiel der *Clairaut*schen Differentialgleichung

$$y = xy' + f(y')$$

etwas näher ansehen. Um eine Differentialgleichung für die neue unbekannte Funktion

$$y' = p$$

zu bekommen, differenzieren wir

$$y = xp + f(p)$$

nach x. So finden wir

$$p = p + xp' + f'(p)p'$$

oder

$$p'(x + f'(p)) = 0.$$

Also ist entweder

$$p' = 0$$

oder aber

$$x + f'(p) = 0.$$

Im ersten Falle wird

$$p = c.$$

Daher wird dann

$$y = xc + f(c)$$

das allgemeine Integral. Das ist also eine Schar von geraden Linien. Im zweiten Falle aber wird

$$x = -f'(p).$$

Dies mit

$$y = xp + f(p),$$

d. h. mit

$$y = -pf'(p) + f(p)$$

zusammen gibt eine Parameterdarstellung einer bestimmten Kurve der x, y-Ebene mit p als Parameter, die gleichfalls der Differentialgleichung genügt. Denn auch für diese Kurve wird, wie man leicht ausrechnet,

$$y' = p.$$

Diese Einzelkurve, die zu dem schon gefundenen allgemeinen Integral noch hinzutritt, nennt man ein *singuläres Integral,* während man im Gegensatz dazu die im allgemeinen Integral enthaltenen Einzelintegrale als *partikuläre Integrale* bezeichnet. Das Vorkommen solcher singulärer Integrale, das *Taylor* zum ersten Male im Jahre 1715 bemerkte, scheint im Widerspruch mit unseren seitherigen Auffassungen über die Integrale der Differentialgleichungen zu stehen. Wir wollen daher ihr Vorkommen mit dem allgemeinen Integrale in Zusammenhang bringen und damit eine Aufklärung geben, die *Lagrange* 1774 gefunden hat. Zu dieser Aufklärung führt uns die Bemerkung, daß im Falle der *Clairaut*schen Differentialgleichung das singuläre Integral einfach die Enveloppe der einparametrigen Kurvenschar des allgemeinen Integrales ist. Will man nämlich die Enveloppe der Geradenschar

$$y = xc + f(c)$$

bestimmen, so hat man bekanntlich[1]) diese Gleichung nach dem

[1]) Ohne auf eine allgemeine Theorie der Enveloppen einer beliebigen Kurvenschar eingehen zu wollen, sei hier nur so viel gesagt. Bei den Geradenscharen

$$y = xc + f(c)$$

mögen vorab die folgenden Bemerkungen Platz haben. Da die Schargeraden einander nicht parallel sind, so schneiden sich je zwei derselben. Wenn man eine Kurve sucht, die von den Geraden der Schar berührt wird, so kann man sich gegenwärtig halten, daß zwei genügend benachbarte Tangenten sich in der Nähe ihrer Berührungspunkte schneiden und daß der Berührungspunkt der Geraden c als Grenzlage des Schnittpunktes der beiden Geraden c und $c + h$ für $h \to 0$ aufgefaßt werden kann. Der Schnittpunkt aber bestimmt sich aus

Parameter c zu differenzieren und dann aus beiden Gleichungen c zu eliminieren. So findet man hier für die Enveloppe

$$x = -f'(c)$$
$$y = xc + f(c).$$

Das ist aber gerade die Parameterdarstellung des singulären Integrales. Da aber nun die Enveloppe von den Kurven des allgemeinen Integrals berührt wird, so genügen auch ihre Linienelemente der Differentialgleichung. Unter einem Linienelement verstanden wir ja ein Wertetripel x, y, y' oder geometrisch einen Punkt x, y vereinigt mit dem Richtungstangens einer ihn passierenden Geraden. Da dann aber alle Linienelemente der partikulären Integrale der Differentialgleichung genügen, so genügt auch ein jedes Linienelement, das ein solches partikuläres Integral mit der Enveloppe im

---

den beiden Gleichungen

$$y = xc + f(c)$$
$$y = x(c+h) + f(c+h)$$

oder auch aus den beiden Gleichungen

$$y = xc + f(c)$$
$$0 = x + \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Geht man nun zu $h \to 0$ über, so erhält man, wie im Text angegeben wurde, zur Bestimmung des Punktes, in dem die Gerade c die Enveloppe berührt, die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= xc + f(c) \\ 0 &= x + f'(c), \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} y &= -cf'(c) + f(c) \\ x &= -f'(c), \end{aligned}$$

die man also als eine auf den Parameter c bezogene Darstellung der Enveloppe auffassen mag. Man überzeugt sich weiter leicht, daß die Enveloppe in ihrem Punkt c von der Schargeraden c berührt wird. Denn die Gleichung der Tangente an die Enveloppe im Punkte c wird ja

$$y = xc + f(c).$$

Bei diesen letzten Darlegungen ist stillschweigend angenommen, daß die beiden Gleichungen

$$x = -f'(c)$$
$$y = -cf'(c) + f(c)$$

tatsächlich eine Kurve bestimmen. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn $f'(c)$ von c unabhängig ist. Sei etwa $f'(c) = a$. Dann wird $f(c) = ac + b$, also die Enveloppe durch den Punkt

$$x = -a, \quad y = b$$

geliefert. Tatsächlich bestehen dann ja auch die Lösungen der Differentialgleichung

$$y = xy' + ay' + b$$

aus den geraden Linien

$$y = xc + ac + b,$$

die alle durch den Punkt

$$x = -a, \quad y = b$$

hindurchgehen.

Berührungspunkt gemeinsam hat, der Differentialgleichung. Da aber die Enveloppe nur solche Linienelemente besitzt, so ist es nicht verwunderlich, daß die Enveloppe der partikulären Integrale der Differentialgleichung genügt. In diesen Bemerkungen ist schon das allgemeine Gesetz begründet, daß stets die Enveloppen der partikulären Integrale als singuläre Integrale der Differentialgleichung genügen.

Auch bei der *Lagrangeschen Differentialgleichung*

$$x + yf(y') + \varphi(y') = 0$$

erlaubt es die Einführung von

$$y' = p,$$

die vorzunehmenden Auflösungsprozesse erst nach der Integration auszuführen. Führt man nämlich $y' = p$ ein und differenziert nach x, so erhält man

$$1 + pf(p) + yf'(p)p' + \varphi'(p)p' = 0.$$

Führt man nun noch y statt x als unabhängige Variable ein, so erhält man

$$1 + pf(p) + yf'(p)p\frac{dp}{dy} + \varphi'(p)p\frac{dp}{dy} = 0$$

für $p(y)$. Geht man zur Umkehrungsfunktion $y(p)$ über, so wird

$$\frac{dy}{dp}(1 + pf(p)) + y \cdot pf'(p) + p\varphi'(p) = 0$$

und das ist eine lineare Differentialgleichung für $y(p)$.

Hat man aus ihr y als Funktion des Parameters p bestimmt, so liefert die Differentialgleichung selbst leicht auch x als Funktion dieses Parameters. Daß man so wirklich die Lösungen in Parameterdarstellung gefunden hat, verifiziert man leicht durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Ganz ähnlich verfährt man auch bei den anderen Differentialgleichungen, die zu Beginn dieses Paragraphen aufgeführt wurden.

§ 7. Ziel und Tragweite der elementaren Integrationsmethoden.

Nach unseren Erfahrungen kann man es wohl als das Ziel der elementaren Integrationsmethoden bezeichnen, geschlossene Ausdrücke für die Lösungen von Differentialgleichungen zu finden. Als Hilfsmittel werden dabei die elementaren Funktionen und die Quadraturen, d. h. die unbestimmten Integrale zugelassen. Es ist ja ein bekannter Satz von *Liouville*, daß man nicht alle unbestimmten Integrale, auch wenn die Integranden elementare Funktionen sind, durch elementare Funktionen ausdrücken kann. Elementar heißen dabei alle Funktionen, die sich durch endlich oftmalige Anwendung algebraischer, exponentieller und logarithmischer Prozesse explizit darstellen lassen. Ebenso

sollen jetzt noch endlich viele Quadraturen zugelassen werden. Es ist wieder ein Satz von *Liouville*, daß man nicht alle Differentialgleichungen erster Ordnung auf diese Weise lösen kann. Die Beispiele, an denen das *Liouville* gezeigt hat, gehören dem Gebiet der sogenannten *Riccati*schen Differentialgleichungen an. Darunter versteht man eine Differentialgleichung von dieser Gestalt:

$$y' = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\,y + \alpha_2(x)\,y^2. \tag{1}$$

Euler, dessen „Institutiones calculi integralis" auch heute noch die reichste Sammlung elementar integrierbarer Differentialgleichungen enthalten, hatte sich damit befaßt, elementar integrierbare Fälle der speziellen *Riccati*schen Gleichung

$$y' + y^2 = a x^m \qquad (a = \text{Konstante}) \tag{2}$$

zu finden. Sein Ergebnis ist dieses: *Es läßt sich Trennung der Variablen stets dann erreichen, wenn der Exponent m unter Verwendung einer ganzen positiven Zahl k in einer der beiden Formen*

$$m = \frac{-4k}{2k+1} \quad \text{oder} \quad m = \frac{-4k}{2k-1}$$

geschrieben werden kann. Im ersten der beiden Fälle macht man die Substitution

$$x = t^{1/m+1}, \quad y = \frac{a}{m+1} Z^{-1}$$

und gelangt so zu der Differentialgleichung

$$Z' + Z^2 = \frac{a}{(m+1)^2} t^n \qquad \text{mit } n = -\frac{4k}{2k-1}.$$

In einer solchen geht man dann mit der Substitution

$$t = \frac{1}{\tau}, \qquad Z = \frac{1}{t} - \frac{z}{t^2}$$

weiter und gelangt zu

$$z' + z^2 = \frac{a}{(m+1)^2} \tau^\nu \qquad \text{mit } \nu = \frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}.$$

Somit kommt man durch mehrmalige Verwendung solcher Substitutionen in allen erwähnten Fällen nach endlich vielen Schritten zu einer Differentialgleichung

$$y' + y^2 = \alpha$$

mit konstantem α, in welcher also die Variablen getrennt sind. Als Grenzfall $k \to \infty$ ist unter den *Riccati*schen Gleichungen auch noch

$$y' + y^2 = a x^{-2}$$

enthalten. Hier führt die Substitution $y = \frac{1}{z}$ zu einem der schon behandelten Typen. *Liouville* hat nun gezeigt, daß die hier aufgeführten die einzigen Fälle sind, in welchen spezielle *Riccati*sche Gleichungen elementar integrierbar sind. Damit hat er Beispiele von Differentialgleichungen gegeben, welche *nicht* elementar integrierbar sind. Die

*Liouville*sche Arbeit, auf die wegen des Beweises verwiesen werden muß, steht in *Liouvilles* Journal de mathématiques, Bd. 6 (1841).

Der Leser wird noch ein Wort über die allgemeine *Riccati*sche Gleichung (1) vermissen. Sie wird durch die Substitution

$$y = -\frac{1}{\alpha_2}\frac{d\log u}{dx} \tag{3}$$

in die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\alpha_2 u'' - (\alpha_2' + \alpha_1\alpha_2)u' + \alpha_0\alpha_2^2 u = 0 \tag{4}$$

übergeführt[1]). Der von *Euler* behandelte spezielle Typus (2) führt auf

$$u'' - ax^m u = 0,$$

die also für $m = \frac{-4k}{2k \pm 1}$ elementar integriert werden kann. Elementar sind weiter diejenigen dem allgemeinen Typus (1) angehörigen Gleichungen zu integrieren, in welchen

$$\alpha_0\alpha_2 = c_1,\ \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} + \alpha_1 = c_2 \text{ ist (wo } c_1 \text{ und } c_2 \text{ Konstanten sind).}$$

Denn dann bekommt die lineare Differentialgleichung (3) konstante Koeffizienten und kann daher, wie wir S. 116 ff. sehen werden, elementar behandelt werden. Bei Betrachtung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden wir nochmals auf die *Riccati*schen zurückkommen und dann noch einen allgemeinen Satz über dieselben kennen lernen.

II. Kapitel.

Die Methode der sukzessiven Approximationen und verschiedene Anwendungen derselben.

Die bisher verwendeten Methoden sind recht primitiv und dementsprechend ist ihre Tragweite gering. Natürlich kann man in hinreichend einfachen Fällen Ersprießliches mit denselben erzielen, aber in komplizierteren Fällen werden die Resultate rechnerisch recht umständlich. Daran ändern auch nichts die Überlegungen, durch die *Lie* die Theorie der elementaren Integrationsmethoden auf eine systematische Basis gestellt hat. Auch ist die Ausbeute für die Untersuchung der funktionentheoretischen Natur der Lösungen und ihres numerischen Verlaufes sehr gering, ganz abgesehen davon, daß es, wie wir sahen, Fälle gibt, wo diese Methoden gar nicht zum Ziele führen können.

Es ist daher an der Zeit, daß wir uns wieder auf unsere Aufgabe besinnen und uns nicht in das Studium der Lösungs*methoden*

[1]) Jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung kann durch Umkehrung dieses Prozesses auch in eine *Riccati*sche verwandelt werden.

verlieren und nicht darüber die Lösungen selbst vernachlässigen. Dies ist auch der Grund, weswegen ich hier auf *Lie* nicht näher eingehe[1]).

Wir wollen zunächst eine bequeme, gut konvergente Methode zur näherungsweisen Integration von Differentialgleichungen kennen lernen. Wir werden uns dabei auch gleichzeitig vergewissern, daß in der Tat jede Differentialgleichung Lösungen besitzt, und damit zugleich die S. 4 ausgesprochene Vermutung beweisen.

§ 1. Das Verfahren der sukzessiven Approximationen.

Zunächst wollen wir den folgenden **Satz** beweisen.

Existenztheorem: *In der Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

sei $f(x, y)$ in einem gegebenen konvexen Bereiche[2]) *B der xy-Ebene stetig und genüge für jedes dem Bereiche angehörige Punktepaar (x, y_1) und (x, y_2) der Lipschitzschen Bedingung*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq M\,|y_1 - y_2|,$$

wo M eine passende, von x, von y_1 und y_2 unabhängige positive Zahl ist. In B sei ferner $|f(x, y)| < \mathsf{M}$. Es seien weiter a und b zwei positive Zahlen, die der Bedingung

$$b > a\,\mathsf{M}$$

genügen, und für die das Rechteck R:

$$|x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

dem Bereiche B angehört. Dann gibt es genau eine samt ihrer ersten Ableitung in $|x - x_0| < a$ stetige Funktion $y = \varphi(x)$, die der Differentialgleichung (1) genügt, für die also in $|x - x_0| < a$

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

gilt, und die zugleich durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht, für die also $\varphi(x_0) = y_0$ ist.

---

[1]) *Sophus Lie* hat in seinem gemeinsam mit *Georg Scheffers* herausgegebenen Buch: *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* (Leipzig 1891) eine eingehende Theorie der elementaren Integrationsmethoden gegeben. Man vergleiche auch den gerade herausgekommenen Bd. III der gesammelten Abhandlungen von *Lie*.

[2]) Unter einem „Bereiche der xy-Ebene" werde ein für allemal eine Punktmenge dieser Ebene verstanden, die eine passende um jeden ihrer Punkte gelegte Kreisscheibe gleichfalls enthält und die außerdem aus nur einem Stück besteht, so daß man also je zwei ihrer Punkte miteinander durch einen dem Bereiche angehörigen Polygonzug verbinden kann. Enthält der Bereich überdies die geradlinige Verbindung eines jeden ihm angehörigen Punktpaares, so heißt er konvex.

Die im Satz genannte *Lipschitz*sche Bedingung ist sicher dann erfüllt, wenn $f(x, y)$ eine in B stetige partielle Ableitung nach y besitzt. Denn wenn diese dann in B der Ungleichung $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M$ genügt, dann lehrt der Mittelwertsatz, daß die *Lipschitz*sche Bedingung erfüllt ist.

Um zum Beweis das Verfahren der sukzessiven Approximationen einzuleiten, geht man von irgendeiner stetigen bei x_0 differenzierbaren Funktion $y_0(x)$ aus, die nur der Anfangsbedingung $y_0(x_0) = y_0$ genügen und außerdem dem Bereich B angehören möge. Man kann als solche erste Näherung $y_0(x)$ etwa die Konstante $y_0(x) \equiv y_0$ wählen. Man kann aber auch, und das wird zweckmäßiger sein, den Polygonzug nehmen, den wir schon auf S. 3 erwähnt haben und der den bekannten Näherungssummen der bestimmten Integrale entspricht. Aber wie dem auch sei, irgendeine solche erste Näherung $y_0(x)$ bildet den Ausgangspunkt. Die weiteren Näherungen werden auf folgende Weise erhalten. Wäre schon

$$\frac{dy_0}{dx} = f(x, y_0(x)),$$

so wäre $y_0(x)$ eine Lösung. Dies wird selten so sein. Daher setze man

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0(x))$$

und bestimme hieraus $y_1(x)$ so, daß $y_1(x_0) = y_0$ wird. Dann wird offenbar

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\, dx.$$

Nun bestimmt man y_2 so aus $\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1(x))$, daß $y_2(x_0) = y_0$ wird,

und findet $$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx.$$

Allgemein wird

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_{n-1})$$

und also $$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx.$$

Wir wollen zeigen, daß der $\lim_{n\to\infty} y_n(x)$ existiert und daß die Grenzfunktion $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist. Zunächst erörtere ich die Frage, ob man die angegebenen Schritte tatsächlich ausführen kann. Das geht dann und nur dann, wenn die Kurven $y = y_n(x)$ für das Intervall $|x - x_0| < a$

alle dem zugrunde gelegten Bereich angehören. Für $y_0(x)$ wurde dies vorausgesetzt. Für die anderen $y_n(x)$ aber wird.

$$|y_n(x) - y_0| \leqq \int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1})|\, dx < \mathsf{M}\,|x - x_0|.$$

Die Seitenlängen des Rechtecks R sind $2a$ und $2b$. Nun ist

$$a < \frac{b}{\mathsf{M}}$$

angenommen. Daher liegen für $|x - x_0| < a$ alle Näherungskurven $y_n(x)$ im Rechteck R.

Weiter bemerkt man, daß

$$\left|\frac{y_1(x) - y_0(x)}{x - x_0}\right|$$

beschränkt ist. Unter N eine passende Zahl verstanden, hat man also

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqq N\,|x - x_0|.$$

Ferner wird

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} (f(x, y_1) - f(x, y_0))\, dx\right| \leqq M \left|\int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_0(x)|\, dx\right|$$

$$\leqq M N \left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx\right| = M N \frac{|x - x_0|^2}{2}.$$

Allgemein wird, wie man durch vollständige Induktion nachweist,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqq M^{n-1} \cdot N \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Denn nimmt man

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leqq M^{n-2} \cdot N \cdot \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

als richtig an, so folgt aus

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^{x} \{f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})\}\, dx,$$

daß

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqq M \left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1} - y_{n-2}|\, dx\right| \leqq M^{n-1} \cdot N \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

ist.

Die Reihe

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$$
$$= y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \ldots$$

konvergiert hiernach absolut und gleichmäßig für alle x mit $|x - x_0| < a$. Die Konvergenz ist mit der der Reihe für die Exponentialfunktion vergleichbar. Sie ist also eine sehr gute. Wegen der gleichmäßigen

Konvergenz ist $y(x)$ stetig in $|x - x_0| < a$. Da $y_n(x)$ in R verläuft, ist $f(x, y_n)$ erklärt und eine stetige Funktion von x. Aus

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$$

ergibt sich für $n \to \infty$, weil $y_{n-1} \to y$ gleichmäßig für alle $|x - x_0| < a$,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ .$$

So haben wir also eine Lösung der Differentialgleichung gefunden, die der gegebenen Anfangsbedingung genügt. Wir wollen uns noch überzeugen, daß sie tatsächlich die *einzige* Lösung ist. Denn nimmt man an, $Y(x)$ und $y(x)$ seien zwei Lösungen, die der Bedingung

$$y(x_0) = Y(x_0) = y_0$$

genügen. μ sei das Maximum der Differenz $|Y(x) - y(x)|$ für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha$. α ist dabei eine Zahl, über die wir gleich noch näher verfügen werden. Dann ist

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqq M\, |Y - y|.$$

Aus

$$Y' - y' = f(x, Y) - f(x, y)$$

folgt weiter

$$|Y - y| \leqq M\, \mu\, |x - x_0| \leqq M\, \mu \cdot \alpha.$$

Sei nun weiter $\alpha < \frac{1}{2M}$, so ist

$$|Y(x) - y(x)| \leqq \frac{\mu}{2} \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha,$$

was nur dann keinen Widerspruch gegen die Definition von μ bedeutet, wenn $\mu = 0$ ist. Dann fallen aber zwischen $x = x_0$ und $x = x_0 + \alpha$ beide Lösungen zusammen. Ebenso schließt man im Intervall $x_0 - \alpha \leqq x \leqq x_0$ usw. Tatsächlich existiert also nur eine Lösung bei gegebener Anfangsbedingung[1]). Der eingangs ausgesprochene Satz ist also nun in allen Teilen bewiesen. Die Gesamtheit der nach ihm vorhandenen Integrale machen das *allgemeine Inte-*

[1]) Man kann unschwer unser Ergebnis dahin ergänzen, daß es außer der gefundenen keine Lösung gibt, für die $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ ist. Wenn man also von einer Lösung $f(x)$ nur voraussetzt, daß sie für $x_0 < x < x_0 + a$ differenzierbar ist, und daß $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ ist, so ist sie schon mit der im Existenztheorem angegebenen identisch.

gral der Differentialgleichung aus. Jedes einzelne derselben heißt ein *partikuläres Integral.* (Vgl. dazu die vorläufige Erklärung S. 17.)

Bemerkung: 1. Unsere Beweisführung läßt nicht erkennen, inwieweit die gemachten Voraussetzungen für die Richtigkeit der Behauptungen notwendig sind. In dieser Hinsicht hebe ich folgendes hervor. Für die Existenz der Lösungen reicht die Stetigkeit von $f(x, y)$ hin. Erst für die Einzigkeit der Lösung, d. h. ihre eindeutige Bestimmtheit durch die Anfangsbedingungen muß eine weitere Bedingung wie die *Lipschitz*sche gefordert werden. Dies hat zuerst *Peano* erkannt. Einen besonders durchsichtigen Beweis hat *Perron* Annalen 76 gegeben. Daß die Einzigkeit der Lösung ohne *Lipschitz*-Bedingung verloren gehen kann, sieht man schon an der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}$$

an der Stelle $x = y = 0$. Denn $y = 0$ und $y = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{x}{|x|}$ sind zwei Lösungen durch diesen Punkt. Vgl. auch S. 83 ff.

2. Die Güte der Konvergenz unseres Verfahrens, d. h. die Zahl der Schritte, welche man nötig hat, um eine gewisse Annäherung an die Integralkurve zu erzielen, hängt wesentlich von der Zahl M, d. h. von dem Maximum von $\frac{\partial f}{\partial y}$ in dem Rechteck ab. Man kann sich geometrisch leicht überlegen, daß man es in einem gewissen Maße in der Hand hat, durch eine passende Substitution, die geometrisch auf eine Drehung des xy-Koordinatensystems hinausläuft, hier einigermaßen günstige Verhältnisse zu schaffen. Schon S. 3 war von der geometrischen Deutung der Differentialgleichung die Rede. Ihr geometrisches Äquivalent war ein Feld von Linienelementen. Man kann demselben eine gewisse Übersichtlichkeit dadurch verschaffen, daß man die Linien einzeichnet, in deren Punkten Linienelemente gleicher Richtung liegen. Wir wollen sie die *Isoklinen* der Differentialgleichung nennen. Wenn nun $\frac{\partial f}{\partial y}$ einen großen Wert hat, so bedeutet das geometrisch, daß sich auf den Parallelen zur y-Achse die Richtung der Linienelemente rasch ändert, daß also diese geraden Linien die verschiedenen Isoklinen in rascher Folge durchsetzen. Wenn man also das Koordinatensystem so legt, daß die Isoklinen einigermaßen senkrecht zur Richtung der x-Achse stehen, so wird im neuen System $\frac{\partial f}{\partial y}$ einigermaßen klein werden und dann wird die Konvergenz unseres Verfahrens besser. Das kommt auch bei der geometrischen Durchführung der Methode der sukzessiven Approximationen zur Geltung.

3. Schon im vorigen Abschnitt wurde erwähnt, daß ein Unendlichwerden von $f(x, y)$ nicht notwendig ein singuläres Vorkommen zu bedeuten hat. Es kann einfach auf der Lage des Koordinatensystems beruhen, und bedeuten, daß eine Lösung der y-Achse parallel wird. Schon damals stellten wir fest, daß man dem durch Änderung des Koordinatensystems, also z. B. durch Vertauschung von x und y, begegnen kann. Wenn also $\frac{1}{f(x, y)}$ stetig bleibt, können wir wieder zum Ziele gelangen. Aber es bleibt mißlich, daß z. B. die Methode der sukzessiven Approximationen über eine solche Stelle weg nicht konvergiert. Auch die weitere Verlagerung des Koordinatensystems wird keine voll befriedigende Antwort geben. Diese bekommt man erst, wenn man zu einer Parameterdarstellung übergeht. Man kann dann etwa durch irgendeine Gleichung $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y)$ mit stetigem $\varphi(x, y)$ den Parameter t einführen.

Trägt man nämlich rechts die Gleichung $y = f(x)$ einer Lösung ein, so gewinnt man hieraus durch Quadratur ihre Parameterdarstellung[1]), wobei noch der $t = 0$ entsprechende Punkt auf jeder Lösung beliebig wählbar bleibt, wie es der noch auftretenden Integrationskonstanten entspricht. Durch Einführung dieses Parameters t kann man dann statt $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ auch schreiben $\frac{dy}{dt} = f \cdot \varphi$ und so diese eine Differentialgleichung durch das System $x' = \varphi$, $y' = f \cdot \varphi$ ersetzen. Ein entsprechender Existenzsatz lehrt dann wieder, daß es unter entsprechenden Bedingungen für f und φ genau eine Lösung gibt, die für $t = t_0$ die Werte x_0 und y_0 annimmt. Denkt man noch an die Willkür in der Wahl des $t = 0$ entsprechenden Punktes, so kann man auch sagen, es gehe nach wie vor durch jeden Punkt x_0, y_0 genau eine Lösung.

Man kann nun aber auch auf Systeme direkt die Methode der sukzessiven Approximationen ohne jede nennenswerte Änderung übertragen und so auch noch allgemeinere Systeme betrachten wie z. B.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z).$$

Hier wird man dann x, y, z als drei Raumkoordinaten deuten. Geometrisch bedeuten dann diese Gleichungen wieder, daß jedem Raumpunkt aus einem gewissen Bereich ein Linienelement zugeordnet wird. Und dann geht wieder durch jeden Punkt eine Lösung. Ich formuliere nun gleich den Satz für das allgemeinste System:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Die Funktionen $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ seien in einem gewissen Bereich der x, y_i, also z. B. in dem Intervall $|x - x_0| < a$, $|y - y_i^{(0)}| < b_i$ eindeutig und stetig erklärt und es sei die Lipschitz-Bedingung

$$|f(x, y', \ldots, y_n') - f(x, y_1'', \ldots, y_n'')| \leqq \mathsf{M}\{|y_1' - y_1''| + \ldots + |y_n' - y_n''|\}$$

erfüllt. Dann gibt es genau n in einer gewissen Umgebung von x_0 stetige und mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktionen $y_i(x)$, welche diesen Differentialgleichungen genügen, und für welche $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$ ist.

Kommt insbesondere auf der rechten Seite x nicht vor, so kann man x als einen Parameter t auffassen und zu einem eine Gleichung weniger umfassenden System übergehen. Durch jeden Punkt des x, y_i-Raumes geht dann genau eine Lösung, die das ursprüngliche System in Parameterdarstellung liefert. Denken wir insbesondere an das ebene System zurück, wo also zwei auf einen Parameter t bezogene Differentialgleichungen $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ vorliegen, so ist dieser Rückgang auf eine Gleichung nur dann nicht möglich, wenn an einer Stelle

[1]) Es wird also $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, f(x))$, also $t = \int \frac{dx}{\varphi(x, f(x))}$.

x_0, y_0 sowohl $f(x_0, y_0)$ wie $g(x_0, y_0)$ verschwinden. Dann wollen wir diese Stelle eine *singuläre* nennen. Wir werden solche singuläre Stellen bald noch ausführlicher behandeln. Hier sei nur einiges angeführt, was aus unseren seitherigen Darlegungen von selbst sich ergibt. Der für Systeme ausgesprochene Existenzsatz ist auch hier ohne weiteres anwendbar. Es gibt genau eine Lösung, welche für $t = t_0$ die Werte x_0 und y_0 annimmt, das ist eben die Lösung $x = x_0$, $y = y_0$; der geometrisch in der x-y-Ebene keine Kurve, sondern eben nur der singuläre Punkt entspricht. Auch hier ist wieder [1]) zu bemerken, daß unsere Beweisführung die Behauptung mit umfaßt, daß es auch keine weiteren Lösungen gibt, die für $t \to t_0$ gegen x_0 und y_0 konvergieren. Wohl aber kann es weitere Lösungen geben, welche für $t \to \infty$ gegen x_0 und y_0 konvergieren. So sind ja z. B. für die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

deren singulärer Punkt $x = y = 0$ ist, alle Geraden $y = mx$ Lösungen. In Parameterdarstellung kann man das System $x' = x$, $y' = y$ wählen und

$$x = e^t x_0, \quad y = e^t y_0$$

werden Lösungen, welche für $t \to -\infty$ gegen $x = 0$ und gegen $y = 0$ streben.

§ 2. Die graphische Darstellung der Differentialgleichungen.

Für unsere Zwecke ist die Darstellung vermittelst der Isoklinen die wichtigste. Wir haben oben schon dargelegt, daß eine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

jedem Punkt eines Bereiches B, in dem $f(x, y)$ eindeutig, stetig und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehen sein soll, eine Richtung zuordnet, und daß also eine Differentialgleichung durch ein Feld von Linienelementen graphisch dargestellt wird. Um nun in diese Darstellung eine gewisse Übersichtlichkeit zu bringen, verbinden wir die Punkte des Bereiches, welchen die gleiche Richtung zugeordnet ist, durch Kurven, die wir Isoklinen nennen. Wir versehen die einzelnen Isoklinen mit Nummern und merken uns in einem nebenan verzeichneten Richtungsplan die zugehörigen Richtungen an [2]).

[1]) Vgl. die Fußnote [1]) auf S. 28.

[2]) Man könnte natürlich auch gerade Linien der verlangten Richtung an die Isoklinen selbst zeichnen. Es würde aber Wirrwarr geben, wollte man sie hier so lang wählen, daß man mit einiger Sicherheit dann durch andere Punkte Parallelen dazu ziehen kann.

In Fig. 3 verzeichnen wir das Bild der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

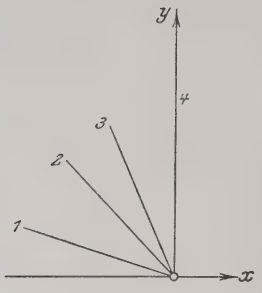

Fig. 3a.

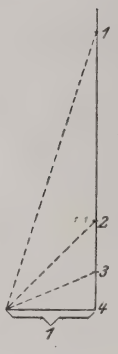

Fig. 3b.

Fig. 4 zeigt die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

wobei der kleinste Kreisradius als Längeneinheit gedacht ist.

Eine besondere Eigentümlichkeit weisen die Linienelemente der linearen Differentialgleichungen auf. Diejenigen Linienelemente nämlich, welche zu Punkten mit gleicher Abszisse gehören, sind auf einen festen Punkt hingerichtet. Wenn nämlich die Differentialgleichung

$$y' + f(x)\,y + g(x) = 0$$

gegeben ist, so gehört das Linienelement des Punktes xy der Geraden

$$\eta = y - (f(x)y + g(x))(\xi - x)$$

an. Das Linienelement des Punktes xy_1 aber liegt auf

$$\eta = y_1 - (f(x)y_1 + g(x))(\xi - x).$$

Beide Geraden schneiden sich im Punkt

$$\xi = x + \frac{1}{f(x)},$$

$$\eta = -\frac{g(x)}{f(x)},$$

dessen Koordinaten also nur von x, nicht von y oder y_1 abhängen. Man kann daher die *Leitkurve*

$$\xi = x + \frac{1}{f(x)},$$

$$\eta = -\frac{g(x)}{f(x)}$$

statt des Isoklinenfeldes verwenden, wenn man zu jedem ihrer Punkte die zugehörige Abszisse derjenigen Linienelemente anmerkt, welche auf diesen Punkt hingerichtet sind. Natürlich kann man vou

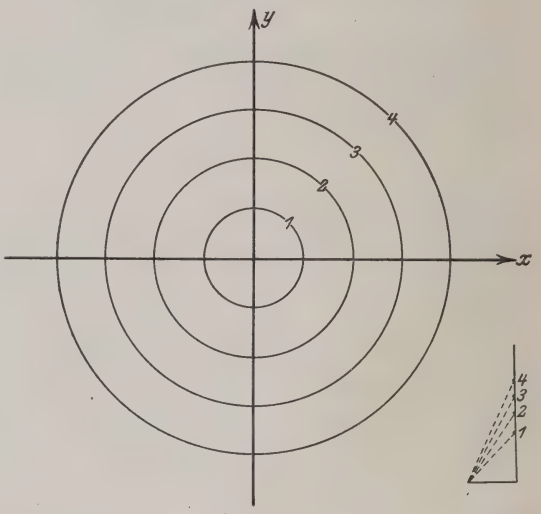

Fig. 4a.

Fig. 4b.

hier aus auch leicht das Isoklinenfeld selbst zeichnen. Fig. 5 zeigt das Bild der Differentialgleichung

$$y' = yx + 1$$

mit der Leitkurve

$$\xi = x - \frac{1}{x}, \qquad \eta = -\frac{1}{x}$$

oder

$$\eta^2 - \eta\xi - 1 = 0.$$

Will man also z. B. das zum Punkt (2, 3) gehörige Linienelement finden, so sucht man den Punkt der Leithyperbel, dessen Ordinate $\eta = -\frac{1}{2}$ ist und verbindet ihn mit (2, 3). Dies liefert die Richtung des Linienelementes (vgl. Fig. 5; an die Hyperbelpunkte sind die Abszissen x angeschrieben).

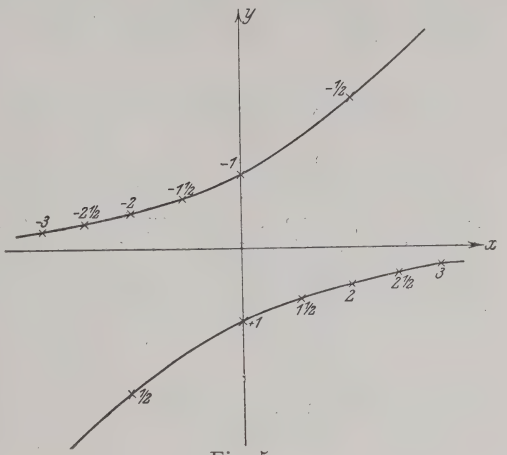

Fig. 5.

Will man etwa ausgehend von der Leitkurve die Isoklinen zeichnen, etwa die zu $y' = 2$ gehörige Kurve, so lege man durch alle Punkte der Leitkurve Parallele zu der gewünschten Richtung der Linienelemente und bringe diese mit den zu den einzelnen Kurvenpunkten gehörigen Parallelen zur y-Achse zum Schnitt. So erhält man zu jeder Abszisse denjenigen Punkt, dessen Linienelement die gewünschte Richtung hat.

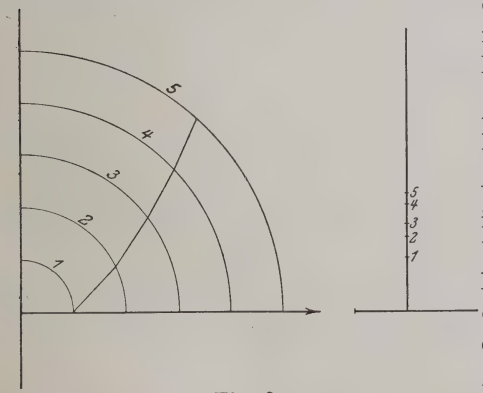

Fig. 6.

Sowohl Isoklinenfeld wie Leitkurve können auch mit Vorteil verwendet werden, wenn es sich darum handelt, in der schon angedeuteten Weise eine erste Näherungslösung der Differentialgleichung zu zeichnen. Fig. 6 zeigt eine solche für die Differentialgleichung

$$y' = x^2 + y^2.$$

Man kann die Näherungen natürlich dadurch verbessern, daß man die Isoklinen dichter wählt. Auch empfiehlt es sich, in dem Gebiet zwischen zwei aufeinanderfolgenden Isoklinen die Näherungskurve nicht mit einer der auf den Isoklinen vorgeschriebenen Richtungen zu zeichnen, sondern dazu das arithmetische Mittel der auf beiden vor-

geschriebenen Richtungen zu verwenden. Daß dies Verfahren bei genügender Verfeinerung gegen die wahre Lösung konvergiert, werden wir bald beweisen und dabei gleichzeitig auch die Güte der bei jedem Schritt erreichten Näherung abschätzen.

§ 3. Wie beurteilt man die Güte einer Näherung?

Wenn man fragt, wie gut eine Näherung mit der gewünschten Lösung übereinstimmt, so verlangt man damit eine Abschätzung der Differenz zwischen der Näherung und der Lösung. Oben, bei der zeichnerischen Behandlung der Differentialgleichung, waren wir in Versuchung, schon zufrieden zu sein, wenn wir nur sahen, daß die betreffende Funktion angenähert der Differentialgleichung genügt, oder anders ausgedrückt, wenn sich herausstellte, daß die Richtungen der Lösungen angenähert mit den in den Punkten der Kurve im Feld vorgeschriebenen Richtungen übereinstimmten. Und hier erhebt sich das Problem. Ich formuliere es so: Man hat zwei Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) + A(x, Y).$$

Man wünscht zu wissen, wie groß die Differenz zweier Lösungen der beiden Gleichungen sein kann, wenn diese Lösungen den gleichen Anfangsbedingungen genügen. Man wird natürlich erwarten, daß ein kleines $A(x, Y)$ einen geringen Unterschied der Lösungen bedingt, oder mit anderen Worten, daß die Lösungen sich stetig mit der Differentialgleichung ändern. Es soll sich aber auch darum handeln, den Unterschied der Lösungen abzuschätzen.

Man braucht nur wieder die Lösungen nach der Methode der sukzessiven Approximationen zu konstruieren. Dabei ergibt sich die Beantwortung unserer Frage mit Leichtigkeit. Zur Erleichterung der Rechnung wollen wir in beide Differentialgleichungen mit der gleichen ersten Näherung hineingehen. Als solche wählt man am besten eine Lösung der zweiten Differentialgleichung, weil man sonst angesichts der wenigen über $A(x, Y)$ gemachten Voraussetzungen nicht sicher ist, daß das Verfahren konvergiert. Diese erste Näherung sei

$$y_0(x) = Y_0(x).$$

Die Lösungen sollen so bestimmt werden, daß sie für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ erhalten. Ich setze weiter voraus, daß

$$|A(x, y)| < \delta$$

sei. Dann finde ich zunächst die beiden Näherungen

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\, dx$$

und

$$Y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\,dx + \int_{x_0}^{x} A(x, y_0(x))\,dx.$$

Ihr Unterschied kann so abgeschätzt werden

$$|Y_1(x) - y_1(x)| < \delta\,|x - x_0|.$$

Daher wird weiter[1])

$$|f(x, y_1) - f(x, Y_1)| < M\,|Y_1 - y_1| < \delta M\,|x - x_0|.$$

So erhält man dann die Abschätzung

$$|Y_2(x) - y_2(x)| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, Y_1) - f(x, y_1)\}\,dx + \int_{x_0}^{x} A(x, Y_1)\,dx\right| < \delta M \frac{|x-x_0|^2}{2} + \delta\,|x - x_0|.$$

Daraus ergibt sich wieder leicht

$$|f(x, Y_2) - f(x, y_2)| < M\,|Y_2 - y_2| < \delta M^2 \frac{|x-x_0|^2}{2} + \delta M\,|x - x_0|.$$

Und daraus findet man

$$|Y_3 - y_3| < \delta M^2 \frac{|x-x_0|^3}{3!} + \delta M \frac{|x-x_0|^2}{2} + \delta\,|x - x_0|.$$

Durch vollständige Induktion bestätigt man leicht, daß allgemein

$$|Y_n - y_n| < \delta M^{n-1} \frac{|x-x_0|^n}{n!} + \delta M^{n-2} \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \delta\,|x - x_0|.$$

Da aber nun für die Lösungen $Y(x)$ und $y(x)$ selbst

$$Y(x) - y(x) = \lim_{n \to \infty} \{Y_n(x) - y_n(x)\}$$

wird, so findet man aus unseren Abschätzungen leicht:

$$|Y(x) - y(x)| < \delta\,|x - x_0|\,e^{M|x-x_0|}.$$

Diese Formel ist es, die wir gewinnen wollten.

Sie bringt u. a. zum Ausdruck, *daß sich bei festen Anfangsbedingungen die Lösungen stetig mit der Differentialgleichung ändern.*

Ich wende dies insbesondere an auf den Fall, daß die *rechte* Seite der Differentialgleichung *stetig von einem Parameter μ abhängt,* genauer, daß sie und die partiellen Ableitungen nach x und y stetige Funktionen von x, y und dem Parameter μ sind. *Dann hängen auch*

---

[1]) M hat dieselbe Bedeutung wie auf S. 25. Überhaupt sollen auch hier die dort über f gemachten Voraussetzungen gelten. Für A wird die *Lipschitz*-Bedingung nicht gefordert, wohl aber soll $|A| < \delta$ in dem damals und auch jetzt zugrunde gelegten Bereich gelten. Daneben mag man etwa die Stetigkeit oder abteilungsweise Stetigkeit von $A(x, y)$ voraussetzen. Unsere Annahme über $Y_0(x)$ hat natürlich zur Folge, daß alle $Y_i(x)$ mit $Y(x)$ übereinstimmen. Es ist aber zweckmäßig das in der Schreibweise nicht zum Ausdruck zu bringen.

die Lösungen stetig von μ ab. Wenn außerdem $f(x, y, \mu)$ eine Ableitung nach μ besitzt, die ihrerseits stetig von x, y, μ abhängt, so besitzen auch die Lösungen stetige erste Ableitungen nach μ.

Zum Beweis bilde man den nach μ genommenen Differenzenquotienten auf beiden Seiten der Gleichung

$$\text{(F)} \qquad \frac{dy(x,\mu)}{dx} = f(x, y(x,\mu), \mu).$$

Man erhält

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x,\mu+\Delta\mu)-y(x,\mu)}{\Delta\mu}\right) = \frac{f(x,y+\Delta y,\mu+\Delta\mu)-f(x,y,\mu)}{\Delta\mu}.$$

Dafür kann man kurz schreiben[1])

$$\text{(H)} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta y}{\Delta\mu}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\vartheta\Delta y, \mu+\vartheta\Delta\mu)\frac{\Delta y}{\Delta\mu} + \frac{\partial f}{\partial\mu}(x, y+\vartheta\Delta y, \mu+\vartheta\Delta\mu) \qquad (0<\vartheta<1).$$

Das ist also eine Differentialgleichung für den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta\mu}$, eine Gleichung, deren Koeffizienten an der Stelle $\Delta\mu = 0$ noch stetig von dem in die Lösung eingehenden Parameter $\Delta\mu$ abhängen. Für $\Delta\mu \to 0$ gehen die Koeffizienten der Differentialgleichung in die der linearen Differentialgleichung

$$\text{(G)} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \mu)\, z + \frac{\partial f}{\partial\mu}(x, y, \mu)$$

über. Man wird vermuten, daß die bei x_0 verschwindende Lösung von (H) bei diesem Grenzübergang $\Delta\mu \to 0$ stetig in die bei x_0 verschwindende Lösung von (G) übergeht. Daher besitzt $\frac{\Delta y}{\Delta\mu}$ für $\Delta\mu \to 0$ einen Grenzwert, und somit ist die bei x_0 der Bedingung $y(x_0) = y_0$ genügende Lösung von (F) eine differenzierbare Funktion von μ. Den Beweis erbringt man am besten durch direkte Integration der linearen Gleichung (G) (vgl. S. 10). Die dort gegebene Auflösungsformel läßt die Richtigkeit unserer Vermutung sofort erkennen.

Bemerkung: Alle Ergebnisse übertragen sich unverändert auf Systeme.

§ 4. Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Der naiven Anschauung liegt die Auffassung nahe, daß eine geringe Änderung der Anfangsbedingungen auch nur eine geringe Änderung der Lösung nach sich zieht. Wir wollen die Richtigkeit dieser Ansicht bestätigen und zugleich eine Abschätzung der Lösungsände-

[1]) Im Falle, wo $f(x, y, \mu)$ analytisch von y, μ abhängt, entwickle man rechts nach Potenzen von Δy und $\Delta\mu$.

rung gewinnen. Auch hierzu leistet die Methode der sukzessiven Approximationen gute Dienste. Es sei etwa

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

die Differentialgleichung, und die Anfangsbedingung für die Lösung $Y(x)$ sei

$$Y(x_0) = y_0;$$

für die Lösung $y(x)$ aber sei $y(x_0) = y_0 + \varepsilon$, wo $|\varepsilon| < \eta$ sei.

Dann sei etwa

$$Y_0(x) = y_0 \qquad y_0(x) = y_0 + \varepsilon$$

$$Y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y_0(x))\, dx \qquad y_1(x) = y_0 + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\, dx$$

$$Y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y_1)\, dx \qquad y_2(x) = y_0 + \varepsilon + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx.$$

Daraus gewinnt man

$$|Y_1(x) - y_1(x)| < \eta + M\eta\,|x - x_0|$$

$$|Y_2(x) - y_2(x)| < \eta + M\eta\,|x - x_0| + M^2\eta\,\frac{|x - x_0|^2}{2}.$$

Vollständige Induktion lehrt allgemein

$$Y_n(x) - y_n(x)| < \eta + M\eta|x - x_0| + M^2\eta\,\frac{|x - x_0|^2}{2} + \ldots + M^n\eta\,\frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Durch Grenzübergang folgt

$$|Y(x) - y(x)| \leqq \eta e^{M|x - x_0|}.$$

Wir haben damit zugleich auch die Größe des Einflusses abgeschätzt, welchen eine Änderung der Anfangsbedingungen auf den Verlauf der Integralkurve äußerstens haben kann. Hätte es sich uns lediglich darum gehandelt, aufzuweisen, daß die Lösung stetig von y_0 abhängt, so hätte die Bemerkung genügt, daß die Näherungslösungen stetig von y_0 abhängen und daß die Reihe

$$y_0 + \Sigma(y_n - y_{n-1})$$

gleichmäßig in y_0 konvergiert. Das folgt einfach daraus, daß die Abschätzungen von der speziellen Wahl von y_0 unabhängig sind, wofern nur (x_0, y_0) ein Punkt aus dem S. 25 eingeführten Rechteck ist. Man gehe nur unter diesem Gesichtspunkt die Betrachtungen von S. 26ff. erneut durch!

Die Lösungen sind also stetige Funktionen der Anfangsbedingungen

$$y = y(x, y_0).$$

Ich werde nun weiter zeigen, daß die Lösungen auch differenzierbare Funktionen der Anfangsbedingungen sind, daß also $y(x, y_0)$ nach y_0 differenziert werden kann.

Zu diesem Zwecke beachte ich, daß natürlich die eben benutzten Näherungslösungen nach y_0 differenzierbar sind und schätze diese Ableitungen ab. Da ε die Differenz von $Y_0(x)$ und $y_0(x)$ ist, so hat man

$$\frac{y_1 - Y_1}{\varepsilon} = 1 + \int_{x_0}^{x} \frac{f(x_1 y_0(x)) - f(x_1 Y_0(x))}{y_0(x) - Y_0(x)}\, dx < 1 + M|x - x_0|.$$

Also ist auch

$$\left|\frac{dy_1}{dy_0}\right| \leqq 1 + M|x - x_0|.$$

Ebenso wird

$$\frac{y_2 - Y_2}{\varepsilon} = 1 + \int_{x_0}^{x} \frac{f(x_1 y_1) - f(x_1 Y_1)}{\varepsilon} \cdot dx.$$

Also wird für $\varepsilon \to 0$

$$\frac{dy_2}{dy_0} = 1 + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y_1) \frac{dy_1}{dy_0}\, dx.$$

Also

$$\left|\frac{dy_2}{dy_0}\right| \leqq 1 + M|x - x_0| + M^2 \frac{|x - x_0|^2}{2}.$$

Allgemein findet man

$$\left|\frac{dy_n}{dy_0}\right| \leqq 1 + M|x - x_0| + \ldots + M^n \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Hieraus schließt man leicht, daß die Reihe

$$\sum \frac{d(y_n - y_{n-1})}{dy_0}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Daher ist bekanntlich auch

$$y(x, y_0) = \lim_{n \to \infty} y_n(x, y_0)$$

nach y_0 differenzierbar. Denn es gilt

$$\frac{dy}{dy_0} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{d(y_n - y_{n-1})}{dy_0}.$$

Da die Reihe gleichmäßig in y_0 konvergiert, *so hängt* $\frac{dy}{dy_0}$ *sogar stetig von* y_0 *ab.*

Die Betrachtungen dieses Paragraphen übertragen sich wieder unverändert auf Systeme. Hieraus oder auch direkt kann man weiter schließen, daß die Lösungen auch stetig von dem Anfangswert x_0 abhängen. Man kann sie also in der Form

$$(1) \qquad y = \varphi(x;\, x_0,\, y_0)$$

schreiben und hat dann in $\varphi(x; x_0, y_0)$ eine samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion vor sich. Man kann diese Gleichung nach y_0 auflösen und schließen, daß die Auflösung

$$y_0 = \psi(x, y, x_0)$$

selbst samt ihren ersten Ableitungen stetig von x, y, x_0 abhängt. Die Auflösung von (1) ist nämlich einfach durch

$$y_0 = \varphi(x_0; x, y)$$

gegeben. Wenn man nämlich mit (x, y) einen Punkt der durch (x_0, y_0) gehenden Lösung bezeichnet, so ist diese Lösung auch durch diesen Punkt bestimmt. Demnach muß insbesondere die durch x, y bestimmte Lösung durch $x_0 y_0$ gehen. Also ist

$$y_0 = \varphi(x_0; x, y),$$

und diese Funktion ist samt den ersten Ableitungen stetig in den mehrerwähnten Rechtecken.

Bemerkung: 1. Übrigens kann man die hier eben behandelte Frage auf das S. 36 erledigte Problem zurückführen. Man mache dazu nur in

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{D}$$

die Substitution $y = Y + \varepsilon$. Dann geht eine Lösung von (D), die für $x = x_0$ den Wert y_0 hat, in eine Lösung von

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y + \varepsilon)$$

über, die bei $x = x_0$ den Wert $y_0 + \varepsilon$ hat. So bekommt man aber etwas weniger weitgehende Ergebnisse.

2. Dieselbe Überlegung erlaubt es auch, den Einfluß einer gleichzeitigen Änderung von Anfangsbedingung und Differentialgleichung zu beurteilen. Wenn man dies z. B. auf Differentialgleichungen anwendet, deren rechte Seite

$$f(x, y, \mu)$$

stetig von x, y und einem Parameter μ abhängt, so erkennt man, daß die Lösung, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, stetig von den beiden Variablen y_0 und μ abhängt. Denn eine gleichzeitige geringe Änderung von y_0 und μ zieht eine geringe Änderung von $f(x, y, \mu)$ und also eine geringe Änderung der Lösung y nach sich.

§ 5. Die *Cauchy*sche Polygonmethode.

Cauchy hat die bekannte zur Definition des bestimmten Integrales dienende Methode auf Differentialgleichungen übertragen. Wir haben den Ansatz dieser Methode schon mehrfach zur näherungsweisen Integration verwendet. Schon *Euler* lehrte ein genähertes Integral dadurch finden, daß man vom Anfangspunkt aus in der dort vorgeschriebenen Richtung ein Stück weit vorgeht, in einem gewissen Punkte dann zu der dort vorgeschriebenen Richtung übergeht, um diese ein Stück einzuhalten usw. Ich will das Verfahren auch so beschreiben. Unter allen möglichen Isoklinen ist eine gewisse Zahl aufgezeichnet. Nur ihre Richtungen werden zur Zeichnung der Integralkurve verwendet. Man geht vom Anfangspunkt in der dort vorgeschriebenen Richtung vor bis zur nächsten Isokline, um dann in der auf ihr vorgeschriebenen

Richtung ein Stück voranzugehen bis auf die folgende Isokline usw. *Cauchy* zeigte, daß dies Verfahren Funktionen liefert, die gegen das wirkliche Integral der Differentialgleichung konvergieren, wenn man nur die zu benutzenden Isoklinen genügend dicht aneinandergelegt hat. Wir wollen den Nachweis aus unseren seitherigen Darlegungen entnehmen und zugleich zeigen, wie man die erreichte Genauigkeit jederzeit abschätzen kann. Namentlich die Darlegungen des vorletzten Paragraphen werden das alles ermöglichen. Die *Euler-Cauchy*sche Methode läuft offenbar darauf hinaus, in dem zwischen zwei Isoklinen gelegenen Bereiche das Richtungsfeld als konstant anzunehmen, und zwar so, daß in jedem Punkt die Richtung vorgeschrieben wird, welche die eine der beiden Isoklinen angibt. Zwischen zwei Isoklinen ist also das Feld stetig, während es beim Übergang über eine Isokline einen Sprung erfährt.

Die *Cauchy*sche Methode verlangt also die Einführung eines allerdings unstetigen Hilfsfeldes und einer Hilfsdifferentialgleichung

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$$

die das gegebene Feld und die gegebene Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ approximieren. Die Funktion $F(x, Y)$ ist dabei so erklärt: Aus dem ursprünglichen Feld wird eine Anzahl von Isoklinen $J_0, J_1, \ldots$ herausgehoben. Auf jeder werde je ein Punkt, nämlich

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \ldots$$

genommen. Dann sei auf J_0 und zwischen

$$J_0 \quad \text{und} \quad J_1 : F(x, Y) = f(x_0, y_0),$$

auf J_1 und zwischen J_1 und $J_2 : F(x, Y) = f(x_1, y_1)$ usw.

Ich schreibe dann die Hilfsdifferentialgleichung so

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) + \{F(x, Y) - f(x, Y)\}.$$

Setze ich dann noch $F - f = A$, so werden die Betrachtungen von S. 34 ff. anwendbar, obwohl F unstetig ist und also auch nicht der *Lipschitz*schen Bedingung genügt. Jedenfalls soll $f(x, y)$ der *Lipschitz*schen Bedingung genügen und daher konvergieren die auf

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

bezüglichen Näherungen y_n. Die auf

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$$

bezüglichen Näherungen Y_n sind aber offenbar alle identisch, wenn man eben für Y_0 die genaue Lösung $Y(x)$ dieser Differentialgleichung, das bekannte *Euler-Cauchy*sche Polygon, nimmt. Diese Tatsachen

genügen aber, um die Betrachtungen von S. 34ff. anwendbar zu machen. Man findet daher für den Unterschied zwischen der genauen Lösung durch (x_0, y_0) und der *Euler-Cauchy*schen Näherung

$$|Y(x) - y(x)| < \delta |x - x_0| e^{M|x - x_0|} .$$

Dabei ist offenbar δ weiter nichts als eine obere Schranke für die Schwankung von $f(x, y)$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Isoklinen. Diese kann beliebig klein gemacht werden, wenn man die Isoklinen hinreichend dicht wählt. Man hat also das Resultat:

Wenn die für die Euler-Cauchysche Näherung benutzten Isoklinen so nahe gewählt sind, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden die Schwankung von $f(x, y)$ kleiner als δ bleibt, und wenn ferner im ganzen Bereich $f(x, y)$ der Lipschitzschen Bedingung von S. 25 genügt, so ist der Unterschied zwischen der genauen Lösung von

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

und der Euler-Cauchyschen Näherung kleiner als

$$\delta |x - x_0| e^{M|x - x_0|} .$$

Man erkennt hieraus, daß es von Vorteil ist, eine etwas andere Hilfsgleichung einzuführen. Man approximiere nämlich das Feld zwischen zwei gezeichneten Isoklinen nicht durch den auf der einen von beiden vorgeschriebenen Wert, sondern vielmehr durch das arithmetische Mittel aus den auf beiden vorgeschriebenen Werten. Dadurch wird der Fehler, z. B. in dem Fall, wo $f(x, y)$ zwischen je zwei gezeichneten Isoklinen monoton verläuft, auf die Hälfte heruntergedrückt.

§ 6. Integration durch Potenzreihen.

Wenn man die spezielle Voraussetzung macht, daß $f(x, y)$ eine analytische Funktion seiner Argumente ist, so werden auch die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

analytische Funktionen. Wir wollen uns davon überzeugen.

Ich setze voraus, daß $f(z, w)$ für $|z - z_0| \leqq a$ und $|w - w_0| \leqq b$ eine eindeutige analytische Funktion der beiden komplexen Variablen z und w sei[1]). Es soll eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w)$$

gefunden werden, die für $z = z_0$ den Wert $w = w_0$ annimmt. z_0 und w_0

[1]) Sie soll also nach z und nach w differenzierbar sein und als Funktion der beiden Variablen z und w stetig sein.

können dabei beliebige komplexe Werte sein. Man kann auch jetzt die Lösung nach der Methode der sukzessiven Approximationen finden. Nur müssen jetzt einige Abschätzungen etwas anders gewonnen werden. Wir benötigen vor allem eine Abschätzung

$$|f(z, w_1) - f(z, w_2)| \leqq M |w_1 - w_2|.$$

Diese gewannen wir S. 26 aus dem Mittelwertsatz[1]). Hier muß etwas anders geschlossen werden. Man muß ja nur erkennen, daß

$$\left| \frac{f(z, w_1) - f(z, w_2)}{w_1 - w_2} \right| \leqq M$$

ist bei passender Wahl von M. Nun ist aber dieser Differenzenquotient selbst eine analytische Funktion für $|z - z_0| \leqq \varrho$, $|w_1 - w_0| \leqq r$ und $|w_2 - w_0| \leqq r$. (Für $w_1 \to w_2$ kommt ja $\frac{\partial f}{\partial w}(z, w_2)$ heraus.) Daher gibt es eine Schranke M, wie wir sie suchen. Wir dürfen ruhig annehmen, daß sie so gewählt ist, daß auch

$$|f(z, w)| \leqq M$$

gilt für $|z - z_0| \leqq \varrho$, $|w - w_0| \leqq r$. Wir können nun wie auf S. 26 die Methode der sukzessiven Approximationen ansetzen. Wir wählen nur aus bald ersichtlichen Gründen als erste Näherung $w_0(z)$ eine analytische Funktion. Ich setze z. B. $w_0(z) = w_0$. Dann wird

$$w_1(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w_0)\, dz$$

leicht erkennt man nun auch, daß es eine Zahl M gibt, so daß

$$|w_1(z) - w_0| < \mathsf{M} |z - z_0| \tag{1}$$

bleibt. Denn $w_1(z)$ ist ersichtlich eine analytische Funktion und kann also in eine Potenzreihe entwickelt werden, die in der Umgebung von $z = z_0$ konvergiert. Sie sei etwa

$$w_1(z) = w_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

Dann wird

$$\frac{w_1(z) - w_0}{z - z_0} = c_1 + \cdots$$

auch eine Potenzreihe und daher ist die Existenz der Zahl M gesichert. Damit ist man nun in der Lage, genau wie auf S. 27 die weiteren Näherungen abzuschätzen, wofern man nur geradlinig von z_0 nach z integriert. Wir müssen uns nur noch ähnlich wie auf S. 27 vergewissern, daß das Einsetzen der gefundenen Näherungen $w_n(z)$ in $f(z, w)$ zu analytischen Funktionen $f(z, w_n(z))$ führt. Dazu ist eben erforderlich, daß die Werte, die $w_n(z)$ annimmt, dem Kreis $|w - w_0| \leqq b$

[1]) Der Leser vergleiche zum folgenden stets die entsprechenden Darlegungen von S. 27.

angehören. Nun ist aber wegen $w_n(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z, w_{n-1})\, dz$ und wegen (1) durch vollständige Induktion

$$|w_n(z) - w_0| \leqq \mathsf{M}\,|z - z_0|\,.$$

Beschränke ich mich also auf den Kreis

$$|z - z_0| \leqq \frac{b}{\mathsf{M}},$$

so ist sicher $|w_n(z) - w_0| \leqq b$. Für diese z ist also unsere Überlegung völlig in Ordnung. Wir gelangen durch sie zu einer gleichmäßig konvergenten Folge von analytischen Näherungsfunktionen, die daher für $|z - z_0| \leqq \frac{b}{\mathsf{M}}$ gegen eine gleichfalls analytische Grenzfunktion konvergiert. Diese ist dann die gesuchte Lösung der Differentialgleichung. Daß es keine weitere gibt, die denselben Anfangsbedingungen genügt, erkennt man, wie auf S. 28.

Als analytische Funktion kann man sie in eine Potenzreihe

$$w(z) = w_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

entwickeln. Da man nun einmal weiß, daß man ihre Koeffizienten so wählen kann, daß sie eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, so kann man ihre wirkliche Bestimmung auch auf anderem bequemerem Wege vornehmen. Dazu bietet sich die Methode der unbestimmten Koeffizienten dar. Man geht mit der Reihe in die Differentialgleichung hinein und bekommt dadurch gewisse Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten, aus welchen man sie berechnen kann.

Wenn nämlich der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) = \sum a_{ik}(z - z_0)^i (w - w_0)^k$$

die Funktion

$$w = w_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

genügen soll, so sind zur Bestimmung ihrer Koeffizienten c_k nur die Ableitungen von w an der Stelle z_0 zu berechnen. Denn es ist ja

$$c_k = \frac{1}{k!}\left.\frac{d^k w}{dz^k}\right|_{z = z_0}.$$

Man entnimmt aber sofort der Differentialgleichung, daß

$$c_1 = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z = z_0} = f(z_0, w_0) = a_{00}$$

ist. Differenziert man die Gleichung einmal nach z und setzt $z = z_0$, so findet man

$$2!\, c_2 = \left.\frac{d^2 w}{dz^2}\right|_{z = z_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{w = w_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{w = w_0} \cdot \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z = z_0} = a_{10} + a_{01}\, c_1\,.$$

So weiterfahrend kann man sukzessive die Koeffizienten berechnen. Denn jede neue Gleichung erlaubt es, einen weiteren Koeffizienten durch die vorher schon bestimmten auszudrücken.

Auch die weiteren Betrachtungen von S. 34ff. lassen sich nun unverändert übertragen. Insbesondere lehrt die Überlegung von S. 36, daß die Lösungen analytisch von den Anfangsbedingungen abhängen und analytische Funktionen eines selbst analytisch in die Differentialgleichung eingehenden Parameters sind.

Auch auf Systeme lassen sich die Betrachtungen ohne weiteres übertragen.

§ 7. Übertragung der *Simpson*schen Regel.

In der Integralrechnung lernt man verschiedene Formeln zur numerischen Quadratur kennen. Die bekannteste ist die *Simpson*sche Regel, die lehrt, daß das Integral

$$J(h) = \int_a^{a+h} f(x)\,dx$$

angenähert durch die Formel

$$J_1(h) = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h)\right)$$

ausgewertet werden kann. Die Güte der Übereinstimmung kommt dort darin zum Ausdruck, daß die Entwicklungen von $J(h)$ und von $J_1(h)$ nach Potenzen von h bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschließlich übereinstimmen. Auch kennt man Formeln zur Abschätzung des Fehlers.

Es ist ein gemeinsamer Zug aller dieser Formeln, den Integralwert näherungsweise durch eine lineare Funktion geeignet gewählter Funktionswerte auszudrücken. *Runge* hat es zuerst unternommen, nach diesem Gedanken Näherungsformeln zur Auflösung von Differentialgleichungen zu gewinnen. *Kutta*[1]) hat in Verfolg dieser Untersuchungen durch eine längere Rechnung folgendes Ergebnis gefunden.

Dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

welches für $x = x_0$ den Wert y_0 besitzt, wird für $x = x_0 + h$ angenähert durch die folgende *Runge-Kutta*sche *Formel* dargestellt:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

[1]) Zeitschrift für Math. u. Phys. 46, 1901.

Hier ist

$$K_1 = f(x_0, y_0),$$
$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_1 h}{2}\right),$$
$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_2 \cdot h}{2}\right),$$
$$K_4 = f(x_0 + h,\ y_0 + K_3 h).$$

Entwickelt man sowohl die Lösung, wie diese Näherung nach Potenzen von h, so erhält man Übereinstimmung bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschließlich.

Was nun die Abschätzung des Fehlers anlangt, den man bei Anwendung dieser Regel begeht, so gewinnt man durch einige Rechnung auf Grund des *Taylor*schen Satzes das folgende Ergebnis. Der Unterschied zwischen der wahren Lösung y_w und der Näherungslösung y_n durch den Punkt (x_0, y_0) genügt der Ungleichung

$$|y_w - y_n| < \frac{6\,\mathsf{M}\mathsf{N}\,|x - x_0|^5\,|\mathsf{N}^5 - 1|}{|\mathsf{N} - 1|}.$$

Dabei ist folgendes vorausgesetzt: Im Gebiete $B: |x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ genügt $f(x, y)$ samt seinen partiellen Ableitungen der vier ersten Ordnungen den folgenden Bedingungen:

$$|f(x, y)| < \mathsf{M},$$
$$\left|\frac{\partial^{(i+k)} f}{\partial x^i \partial y^k}\right| < \frac{\mathsf{N}}{\mathsf{M}^{k-1}} (i + k \leqq 3).$$

Ferner soll

$$|x - x_0|\,\mathsf{N} < 1$$
$$a\mathsf{M} < b$$

sein. Ich will die dazu führenden Rechnungen nicht reproduzieren. Auf eine Aufstellung ähnlicher Fehlerabschätzungen im komplexen Gebiet kann verzichtet werden.

Ich will z. B. für $x = 0{,}2$ dasjenige Integral von

$$y' = x + y$$

berechnen, welches für $x = 0$ verschwindet. Die Näherungsformel liefert 0,0214, die genaue Lösung

$$y = e^x - x - 1$$

ergibt auf vier Dezimalen genau gleichfalls 0,0214.

Die Approximation ist also besser als sie die allgemeine Abschätzung erwarten ließ. Denn diese liefert für $\mathsf{M} = 1$, $\mathsf{N} = 1$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}2$ immerhin als äußersten möglichen Fehler noch $\frac{6 \cdot 2^4}{10^4}$. Hätte man für $x = 0{,}1$ gerechnet, so hätte man als möglichen Fehler nur $\frac{3}{10^4}$ gefunden. Will man auch für 0,2 eine größere Genauigkeit erreichen, so kann man erst den Wert der Lösung für 0,1 berechnen

und dann mit dem gefundenen Wert als Anfangswert nochmals die *Kutta*sche Regel anwenden. Man hat dann außer dem zweimal vorkommenden Fehler von $\frac{3}{10^4}$ noch den Fehler zu berücksichtigen, der davon herrührt, daß man am Anfang des zweiten Intervalles einen um höchstens $\frac{3}{10^4}$ falschen Anfangswert verwendet hat. Das macht aber nach S. 37 für den Wert der Lösung bei 0,2 höchstens $\frac{3}{10^4}$ aus. Daher findet man durch zweimalige Anwendung der *Kutta*schen Regel in der eben angegebenen Weise die Lösung für $x = 0{,}2$ bis auf einen Fehler von äußerstens $\frac{9}{10^4}$.

III. Kapitel.

Diskussion des Verlaufs der Integralkurven.

§ 1. Elementare Betrachtungen.

Es soll sich in diesem Abschnitt darum handeln, rein qualitativ einen Überblick über den Verlauf der Integralkurven zu bekommen, also z. B. Orientierung über ihr Steigen und Fallen zu erhalten, über ihre Konvexität und Konkavität, ihre Wendepunkte und einige weitere Dinge, die wir bald angeben werden. Zunächst soll in diesem Paragraphen über die eben schon bestimmt genannten Fragen Aufschluß gegeben werden. Wenn die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ vorgelegt ist, so trennt die Kurve $f(x, y, 0) = 0$ die Teile des Richtungsfeldes, in welchen die Integralkurven steigen von denjenigen, wo sie fallen. Differenziert man die Differentialgleichung nach x, so erhält man $f_x + f_y \cdot y' + f_{y'} \cdot y'' = 0$.

Daher liegen die Wendepunke der Integralkurven auf der Kurve, deren Gleichung sich durch Elimination von y' aus

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

ergibt. Die Teile derselben, wo $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ ist, kommen dabei offenbar im Allgemeinen nicht in Betracht. Diese Kurve trennt also auch die Teile des Richtungsfeldes, wo die Integralkurven konkav sind, von denjenigen, wo sie konvex sind. Ohne weiteren Zusatz können diese Angaben nur dann verwendet werden, wenn die Differentialgleichung in der Form $y' = F(x, y)$ vorgelegt ist, und wenn dabei $F(x, y)$ in einem Bereich B als eindeutige Funktion erklärt ist. Dann wird $F(x, y) = 0$ der Ort horizontaler Richtung der Integralkurven und

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} F = 0$$

wird der Ort der Wendepunkte. Wir wollen an einem Beispiele die Verwertung der Angaben näher kennen lernen.

Es sei zunächst $y' = 1 + xy$ vorgelegt. Der Ort horizontaler Tangenten ist die Hyperbel $1 + xy = 0$, während die Wendepunkte auf der Kurve dritter Ordnung $x + y + x^2 y = 0$ liegen[1]). Beide Kurven sind in Fig. 7 punktiert eingetragen. Schon diese wenigen Bemerkungen erlauben es, zu erkennen, daß die Integralkurven den in Fig. 7 verzeichneten ungefähren Verlauf haben müssen. Man kann durch Betrachtung der Isoklinen der Genauigkeit der Zeichnung noch etwas zu Hilfe kommen, z. B. beachten, daß die Achsen stets unter 45 Grad durchsetzt werden. Aber nicht alle Integralkurven können die x-Achse treffen. Auch solche Kurven sind in Fig. 7 zu sehen. Wenn man nämlich etwa eine Kurve, die im Punkte $(+1, -1)$ beginnt, für wachsende x verfolgt, so fällt sie ständig, verfolgt man sie aber für abnehmende x, so steigt sie an, bis sie die punktierte Hyperbel trifft. Hier ist sie horizontal, um dann bei weiter abnehmendem x wieder zu fallen.

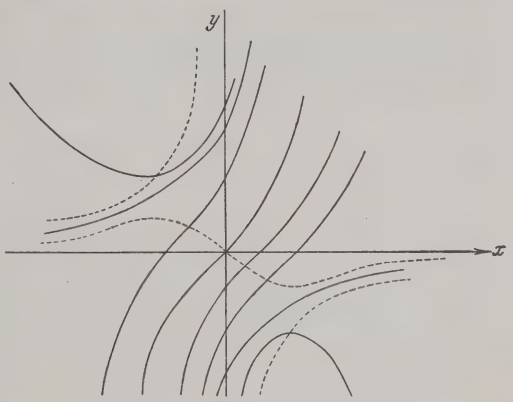

Fig. 7

§ 2. Singuläre Punkte.

Wir haben S. 26ff. bewiesen, daß unter gewissen Voraussetzungen durch jeden Punkt eines Gebietes B nur eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ geht. Die Voraussetzungen aber waren diese: $f(x, y)$ soll in B eindeutig und stetig sein und der *Lipschitz*-Bedingung

$$|f(x, y_1) - f(x_1, y_2)| \leqq M|y_1 - y_2|$$

genügen. Dabei ist M eine von x und dem Wertepaar $y_1 y_2$ nicht abhängende feste Zahl. Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, inwieweit die Bedingungen auch notwendig sind für die Gültigkeit des Ergebnisses. Zunächst wollen wir uns erinnern (vgl. S. 29), daß die bloße Stetigkeit von $f(x, y)$ schon die Existenz der Lösungen zur

[1]) Da für große positive y dieser Ausdruck positiv ist, für große negative aber negative Werte annimmt, so hat in der Tat jede Integralkurve auf dieser C_3 einen Wendepunkt. Ob der Ort der Wendepunkte wirklich nur aus Wendepunkten besteht, bedarf ja auch der Überlegung.

Folge hat. Wenn nur $f(x, y)$ eine stetige Funktion ist, so geht durch jeden Punkt von B *mindestens* eine Lösung hindurch. Aber ohne weitere Voraussetzungen über $f(x, y)$ kann man nicht nachweisen, daß durch jeden Punkt *nur* eine Lösung geht. Tatsächlich kann man Differentialgleichungen mit stetigem $f(x, y)$ angeben, welche mehrere Lösungen durch ein und denselben Punkt schicken. Das gilt schon von der einfachen Differentialgleichung

$$y' = +\sqrt{|y|}.$$

Denn ihre Lösungen sind neben $y = 0$ die Parabeln

$$y = \tfrac{1}{4}(x + h)^2 \quad (\text{für } x \geqq -h)^1)$$
$$y = -\tfrac{1}{4}(x + h)^2 \quad (\text{für } x \leqq -h),$$

welche bei $x = -h$ die x-Achse berühren.

Aber erinnern wir uns an die Definition der Lösung: Lösung heißt jede differenzierbare Funktion, welche der Differentialgleichung genügt. Daher sind auch solche Kurven als Lösungen anzusprechen, welche aus einem geradlinigen Stück und einem Parabelbogen bestehen. Z. B.

$$y = 0 \quad \text{für} \quad x \leqq 0$$
$$y = \tfrac{1}{4}x^2 \quad \text{für} \quad x \geqq 0$$

Ein weiteres Beispiel ist dieses: Die Lösungen sollen durch folgende Kurven geliefert werden

$$\begin{aligned} &y = \alpha && \text{für} && y \leqq 0 \\ &y = \beta x^2 && \text{für} && 0 \leqq y \leqq x^2 \\ &y = x^2 + \gamma && \text{für} && y \geqq x^2. \end{aligned}$$

(α, β, γ Parameter der Kurvenscharen)

Daraus ergibt sich für das $f(x, y)$ der Differentialgleichung

$$f(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad y \leqq 0$$
$$f(x, y) = 2\frac{y}{x} \quad \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq x^2$$
$$f(x, y) = 2x \quad \text{für} \quad y \geqq x^2.$$

Dies so für alle x, y erklärte $f(x, y)$ ist offenbar durchweg stetig[2]). Gleichwohl gehen durch den Koordinatenanfangspunkt unendlich viele Lösungen, nämlich die zwischen $y = 0$ und $y = x^2$ gelegenen Parabeln $y = \beta x^2$.

Man hat zeigen können, daß stets dann, wenn durch einen Punkt, wo $f(x, y)$ stetig ist, mehrere Lösungen gehen, dieselben zwischen zwei äußersten Lösungen liegen und den von beiden gebildeten Winkelraum lückenlos ausfüllen.

---

[1]) Für $x < -h$ wäre y' nicht mehr positiv, so daß also nur diese Parabel*bogen* der Differentialgleichung genügen.

[2]) Für $(x, y) = (0, 0)$ folgt dies daraus, daß für alle (x, y) $|f(x, y)| \leqq 2|x|$ ist.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine stetige Differentialgleichung durch jeden Punkt nur eine Lösung schickt, haben wir in der *Lipschitz*-Bedingung erkannt. Der allgemeineren Frage nach zugleich notwendigen und hinreichenden Bedingungen wollen wir nicht nähertreten.

Nun will ich weiter noch Differentialgleichungen betrachten, bei welchen die Stetigkeit des Richtungsfeldes in einzelnen Punkten unterbrochen ist.

Eine Stelle, wo eine oder die andere Voraussetzung unseres Existenzsatzes von S. 25 nicht erfüllt ist, soll stets eine *singuläre* Stelle heißen.

Ich beginne mit einigen ganz einfachen, aber, wie wir sehen werden, typischen Beispielen:

1. Ich betrachte zunächst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

und will den Verlauf der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Nähe des Koordinatenanfanges untersuchen. Da die Lösungen die Geraden $y = cx$ sind, so zeigt sich, daß alle Integralkurven den Koordinatenanfang passieren. Denn jede Integralkurve ist durch einen ihrer Punkte (x_0, y_0) festgesetzt. Die durch diesen Punkt gehende Integralkurve ist $y = \frac{y_0}{x_0} x$. Tatsächlich ist ja auch $\frac{y}{x}$ für $(x, y) = (0, 0)$ nicht stetig, und das ermöglicht es, daß durch den Punkt nicht eine, sondern alle Lösungen gehen. Aber nicht jede Unstetigkeit am Koordinatenanfang hat diese Folge.

2. Wir brauchen nur die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{y}{x}$$

zu betrachten, um dies einsehen zu lernen. Man findet nämlich $y = cx^a$ als Lösungen. Je nach der Beschaffenheit von a zeigen diese aber verschiedenes Verhalten. Den Fall $a = 1$ haben wir ja schon vorweggenommen. Ist aber a überhaupt *positiv*, so erkennt man genau wie unter 1., daß nach wie vor alle Integralkurven durch den Koordinatenanfang gehen. Sie berühren dort alle bis auf eine die x-Achse, wenn $a > 1$ ist. Sie berühren alle bis auf eine die y-Achse, wenn $a < 1$ ist.

Zu den Lösungskurven gehören namentlich auch die x- und die y-Achse. Wir sagen in all den bisher behandelten Fällen, es liege in $(0, 0)$ ein *Knotenpunkt* der Lösungen vor. Für die x-Achse erkennt man es, wenn man x und y in der Differentialgleichung vertauscht, was stets als zulässig angesehen werden soll. Besser noch geht man zu einer Parameterdarstellung der Differentialgleichung, also z. B. $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = ay$ über.

Ein ganz anderes Bild bieten die Fälle $a < 0$ dar. Dann sind nämlich durch

$$y = cx^a$$

„Hyperbeln“ dargestellt, deren Asymptoten die x- und die y-Achse sind. Diese beiden Geraden gehören auch nach wie vor zu den Lösungen. Wir

sagen in diesem Falle, es liege ein *Sattelpunkt* vor, weil die Integralkurven ähnlich aussehen wie die Höhenlinien in der Nähe eines Gebirgssattels.

In allen diesen Fällen gibt es also Integralkurven durch den Koordinatenanfang, also durch den *singulären Punkt* der Differentialgleichung. Darunter waren immer mindestens zwei Geraden. Nur eine Gerade kommt unter den Integralkurven von

3. $y' = \frac{x+y}{x}$ vor. Die Integralkurven sind nämlich

$$y = x\,(c + \log|x|)$$

und darunter kommt nur die Gerade $x = 0$ vor. Wir haben also noch einen Knotenfall.

Nun werden wir endlich noch Fälle kennen lernen, wo gar keine Kurven durch den singulären Punkt gehen.

4. So sind z. B. die Integralkurven von

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

die Kreise

$$x^2 + y^2 = c\,.$$

Wenn die Integralkurven sich geschlossen um den singulären Punkt herumlegen, spricht man von einem *Wirbelpunkt.*

5. Endlich betrachte ich noch die Differentialgleichung der logarithmischen Spiralen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+ay}{ax-y}\,.$$

Zur Integration dieser Gleichung führt man am besten Polarkoordinaten durch

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

ein. Dann wird die Gleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = ra\,.$$

Also sind wirklich die logarithmischen Spiralen

$$r = ce^{a\varphi}$$

die Lösungen. Diese durchsetzen bekanntlich alle Strahlen durch den Ursprung unter einem festen Winkel, dessen Tangens $\frac{1}{a}$ ist. Daß dies der Fall ist, kann man ja auch direkt aus der Differentialgleichung ablesen. Setzt man nämlich

$$\frac{1}{a} = \operatorname{tg}\alpha$$

und

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi,$$

so kann man ja die Differentialgleichung so schreiben

$$y' = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)\,.$$

Jedesmal dann, wenn die Integralkurven sich asymptotisch um den singulären Punkt herumwinden, spricht man von einem *Strudelpunkt.*

Die hier untersuchten Beispiele sind nun zunächst typisch für die homogene Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax+By}{Cx+Dy}\,,$$

wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden. Sie sind aber auch typisch für eine ausgedehnte weitere Klasse von Differentialgleichungen (§ 6).

§ 3. Die homogene Differentialgleichung $y' = \frac{Ax+By}{Cx+Dy}$.

Da nach den Erfahrungen des vorigen Paragraphen geradlinige Integrale durch den Koordinatenanfang häufig eine gewisse Rolle spielen, so wollen wir versuchen, etwaige derartige Geraden zu Koordinatenachsen zu machen. Ich will daher zusehen, welche Vereinfachungen die Differentialgleichung durch eine lineare Koordinatentransformation erfahren kann. Ich setze an

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases}.$$

Dann erhalte ich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma + \delta y'}{\alpha + \beta y'}.$$

Wären nun $\xi = 0$ und $\eta = 0$ Integralgeraden, so müßte die Differentialgleichung die Gestalt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \lambda \frac{\eta}{\xi} \qquad (\lambda \text{ konstant})$$

besitzen. Ich will daher versuchen, durch passende Wahl der α, β, γ, δ die Differentialgleichung auf diese Gestalt zu bringen. Das führt zu

$$\frac{\gamma(Cx+Dy)+\delta(Ax+By)}{\alpha(Cx+Dy)+\beta(Ax+By)} = \lambda \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}.$$

Setze ich dann

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

so habe ich zu verlangen, daß

$$x(\gamma C + \delta A) + y(\gamma D + \delta B) = \lambda_1(\gamma x + \delta y)$$
$$x(\alpha C + \beta A) + y(\alpha D + \beta B) = \lambda_2(\alpha x + \beta y)$$

ist. Das führt zu

$$(2) \qquad \begin{cases} \gamma(C-\lambda_1)+\delta A = 0 \\ \gamma D + \delta(B-\lambda_1) = 0 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} \alpha(C-\lambda_2)+\beta A = 0 \\ \alpha D + \beta(B-\lambda_2) = 0 \end{cases}.$$

Das sind zwei Paar linearer Gleichungen mit je zwei Unbekannten, die in ihren Koeffizienten übereinstimmen. Sollen dieselben lösbar sein, so müssen λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & B-\mu \\ C-\mu & D \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\mu^2 - \mu(B+C) - (AD - BC) = 0$$

sein.

Wenn diese Gleichung zwei voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, so gehören dazu vermöge der zwei Paar linearer Gleichungen (2) vier Zahlen α, β, γ, δ, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden ist. Denn man findet z. B. für $AD \neq 0$:

$$\alpha : \beta = -A : (C-\lambda_2), \quad \gamma : \delta = -A : (C-\lambda_1).$$

Für $AD = 0$ aber wird $B = \lambda_1$, $C = \lambda_2$. Dann wird $\gamma = 0$ und man darf α sowohl wie β von Null verschieden nehmen. Daher ist nun durch (1) wirklich eine lineare Substitution erklärt, welche die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\eta}{\xi} \tag{4}$$

bringt. Dann sind auch $\xi = 0$ und $\eta = 0$ Integralgeraden, so daß es also für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ stets zwei Integralgeraden gibt. Wenn nun die λ_1 und λ_2 reell sind, so sind sofort einige der im vorigen Paragraphen besprochenen Fälle wieder zu erkennen. Wenn aber die λ_1 und λ_2 konjugiert komplex sind, so bleibt erst noch zu untersuchen, welcher der im vorigen Paragraphen besprochenen Fälle sich unter dieser komplexen Form verbirgt. Um das zu erkennen, mache ich die neue Substitution

$$\xi = s + it$$
$$\eta = s - it.$$

So erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{1 - it'}{1 + it'} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{s - it}{s + it}, \quad \text{wo } t' = \frac{dt}{ds},$$

die sich auch in der Form

$$t' = \frac{s\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{i} + t(\lambda_2 + \lambda_1)}{s(\lambda_1 + \lambda_2) + ti(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

mit reellen Koeffizienten schreiben läßt. Man erkennt also den Fall des Strudelpunktes. Die Integralkurven werden Spiralen, es sei denn, daß

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

ist. Dann sind es geschlossene Kurven (Ellipsen). Es liegt also ein Wirbelpunkt vor.

Nun bleibt noch der Fall zu behandeln, wo die quadratische Gleichung (3) zwei zusammenfallende Wurzeln hat.

Ich behandele erst den Fall, daß die Gleichungen (2) identisch erfüllt sind. Dann muß aber $A = D = B$ und $0 = C$ sein, so daß wieder die Gleichung

$$y' = \frac{y}{x}$$

mit lauter geradlinigen Integralkurven vorliegt. Sind aber die Gleichungen (2) nicht identisch erfüllt, so können wir die eine Gerade, welche dann herauskommt, immerhin durch eine lineare Substitution zur ξ-Achse machen. Wir müssen dazu nur in (1) die Koeffizienten α, β aus (2) bestimmen, die γ, δ aber zunächst noch beliebig annehmen. Dadurch wird dann die gegebene Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{\xi}$$

gebracht. Diese Gleichung kann aber nur eine einzige Integralgerade besitzen. Denn sonst hätte auch die ursprüngliche deren mehrere. Man könnte deren zwei durch eine Substitution der Form (1) zu Integralgeraden machen. Man könnte also die Gestalt (4) erreichen, und es läge somit doch bei der Gleichung (3) einer der schon behandelten Fälle vor. Daher muß nach der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a & b-\mu \\ 1-\mu & 0 \end{vmatrix} = 0$$

auch $b = 1$ sein. In der so erhaltenen Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi+\eta}{\xi}$$

mache man nun weiter die Substitution $\eta = a\eta_1$. Dann geht sie in

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{\xi+\eta_1}{\xi}$$

über und die haben wir schon im vorigen Paragraphen untersucht.

Von Koordinatentransformationen abgesehen, sind also die im vorigen Paragraphen studierten Fälle die einzigen, welche bei den in der Überschrift dieses Paragraphen genannten Differentialgleichungen vorkommen.

Ich merke noch die rechnerischen Ergebnisse der Überlegungen an. Unsere Differentialgleichungen zerfallen zunächst mit Rücksicht auf die Gleichung (3) in drei Klassen:

$$\begin{aligned} &\text{Klasse I: } (B-C)^2 + 4AD > 0 \\ &\text{„ II: } (B-C)^2 + 4AD < 0 \\ &\text{„ III: } (B-C)^2 + 4AD = 0. \end{aligned}$$

Bei Klasse I kann das allgemeine Integral auf die Form

$$(\gamma x + \delta y)^{-\lambda_1} (\alpha x + \beta y)^{\lambda_2} = \text{const.}$$

gebracht werden. λ_1 und λ_2 sind die beiden Wurzeln der Gleichung (3). α, β, γ, δ können aus (2) berechnet werden. Wenn dann λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen haben, d. h. wenn

$$AD - BC < 0$$

ist, so haben wir einen Knotenpunkt. Wenn aber λ_1 und λ_2 verschiedene Vorzeichen haben, wenn also

$$AD - BC > 0$$

ist, so liegt ein Sattelpunkt vor[1]).

Bei Klasse II kann gleichfalls das allgemeine Integral auf die Form

$$(\gamma x + \delta y)^{-\lambda_1} (\alpha x + \beta y)^{\lambda_2} = \text{const.}$$

[1]) Der Fall $AD - BC = 0$ bietet kein Interesse, weil dann der Zähler $Ax + By$ durch den Nenner $Cx + Dy$ teilbar wird und sich also die Differentialgleichung auf $y' = \text{konst.}$ reduziert.

gebracht werden. Das ist keine reelle Schreibweise. Die Betrachtungen von S. 50 und von S. 52 lehren aber, wie dieselbe zu erhalten ist. Man findet beim Übergang zur Polarkoordinaten, wenn man beachtet, daß $\alpha x + \beta y$ und $\gamma x + \delta y$ konjugiert komplex wird,

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = c e^{2i \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \operatorname{arctg} i \frac{(\gamma - \alpha) x + (\delta - \beta) y}{(\gamma + \alpha) x + (\delta + \beta) y}}.$$

Es liegt im allgemeinen ein Strudelpunkt und ausnahmsweise ein Wirbelpunkt vor. Insbesondere arten die Spiralen in Ellipsen aus, wenn $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ist. Ihre Gleichung wird

$$|\alpha x + \beta y|^2 = c.$$

Setzt man

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$$
$$\beta = \beta_1 + i\beta_2,$$

so wird ihre Gleichung

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 + (\alpha_2 x + \beta_2 y)^2 = c.$$

Bei der Klasse III liegt wieder ein Knotenpunkt mit einer einzigen Geraden

$$\alpha x + \beta y = 0$$

vor, deren Koeffizienten α, β sich aus (2) bestimmen.

§ 4. Allgemeine Sätze über den Verlauf der Integralkurven im reellen Gebiet.

Die bloße Anwendung der Sätze über die stetige Abhängigkeit der Integralkurven von den Anfangsbedingungen läßt weitgehende schlüsse über den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

zu in einem Gebiete B, wo Zähler und Nenner als eindeutige und stetige mit stetigen ersten Ableitungen nach x und y versehene Funktionen erklärt sind. Es erweist sich für die Betrachtung als zweckmäßig, die Integralkurven auf einen Parameter t zu beziehen und also die Differentialgleichungen in der Form

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

anzunehmen. Bei den folgenden Darlegungen stütze ich mich im wesentlichen auf eine Arbeit von *Bendixson:* Acta mathematica, Bd. 24 (1900).

Wir haben schon weiter oben festgestellt, daß zu jedem Punkt $x = x_0$, $y = y_0$ des Gebietes B genau eine Lösung gehört, für die $\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0$, $\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$ ist. Eine Änderung des Wertes t_0,

welchen man dem Punkte zuordnet, ändert an der Lösungs*kurve* $x = x(t)$, $y = y(t)$ nichts; dadurch ändert sich nur die Parameterdarstellung. Das folgt sofort daraus, daß eine Substitution $t_1 = t + h$ die Differentialgleichungen, auf deren rechter Seite ja der Parameter fehlt, nicht ändert. Eine solche durch einen Punkt x_0, y_0 festgelegte Lösung wollen wir nun auf ihrem weiteren Verlauf verfolgen. Sie möge etwa von x_0, y_0 ausgehend ein Stück weit nach der Methode der sukzessiven Approximationen durch eine Reihe dargestellt sein. Ist dann x_1, y_1 mit dem Parameterwert t_1 ein weiterer durch diese Darstellung erfaßter Punkt der Lösung, so können wir für x_1, y_1, t_1 erneut das Verfahren der sukzessiven Approximationen ansetzen und so die Lösung ein Stück weiter verfolgen. Nun sind zwei Fälle denkbar, entweder kann man dabei bei fallenden oder bei wachsenden Parametern nicht über einen gewissen endlichen Grenzwert T des Parameters hinauskommen, oder aber man kann dabei zu beliebig großen Werten des Parameters gelangen. Es genügt dabei völlig, wachsende Parameter zu betrachten. Der andere Fall wird durch die Substitution $t_1 = -t$ auf diesen zurückgeführt. Zunächst ist leicht zu sehen: Wenn man bei der Fortsetzung nicht zu beliebig großen Parameterwerten gelangen kann, wenn also die obere Grenze T der erreichbaren Parameterwerte endlich ist, so kann die Lösungskurve für gegen T wachsende Parameterwerte nicht im Inneren des Bereiches B bleiben. Denn aus

$$|P(x(t), y(t))| < \mathsf{M}, \qquad |Q(x(t), y(t))| < \mathsf{M} \quad \text{für} \quad t_0 \leqq t < T$$

folgt

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \mathsf{M}\,|t_1 - t_2|, \qquad |y(t_1) - y(t_2)| < \mathsf{M}\,|t_1 - t_2|.$$

Das bedeutet aber die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{t \to T} x(t) = a, \qquad \lim_{t \to T} y(t) = b.$$

Diese können aber nach der vorhin erwähnten Feststellung von S. 31 nicht im Innern des Bereiches B liegen, weil man sonst die Lösung für T übertreffende Parameterwerte verfolgen könnte. Man gelangt also mit $t \to T$ an den Rand des Bereiches.

Im anderen der beiden unterschiedenen Fälle kann man die Lösung für beliebig große Parameterwerte verfolgen. Hier will ich den Spezialfall vorwegnehmen, daß beide Grenzwerte

$$\lim_{t \to \infty} x(t), \qquad \lim_{t \to \infty} y(t)$$

existieren. a und b seien die beiden Grenzwerte. Dann ist, wie ich zeigen will,

$$P(a, b) = 0 \qquad \text{und} \qquad Q(a, b) = 0,$$

wofern nicht (a, b) am Rande von B liegt. Wäre nämlich z. B.

$P(a, b) \neq 0$, so wäre jedenfalls für genügend große t z. B. für $t \geqq m$

$$|P(x(t), y(t))| > \left|\frac{P(a, b)}{2}\right|.$$

Daher wäre durch Integration

$$|x(t) - x(m)| > \frac{|P(a, b)|}{2}(t - m),$$

so daß also gegen Annahme $\lim_{t \to \infty} x(t) = \infty$ sein müßte. Solche Stellen nun, für welche $P(a, b) = 0$ und $Q(a, b) = 0$ ist, nennen wir *singuläre Stellen* der Differentialgleichung. Durch einen solchen Punkt geht nämlich einmal die Lösung $x = a$, $y = b$, welche das allgemeine Existenztheorem liefert. Es ist aber nach dem eben Festgestellten nicht ausgeschlossen, daß unter Umständen noch eine weitere Integralkurve diesem Punkte für $t \to \infty$ zustrebt. Auch stellt ja die vom Existenztheorem gelieferte Lösung $x = a$, $y = b$ in der x-y-Ebene keine eigentliche Kurve dar. Schon die Betrachtungen des vorigen Paragraphen haben uns einigen Aufschluß über die hier etwa zu erwartenden Möglichkeiten gegeben.

Ich wende mich nun zu dem allgemeinen Fall. *Jetzt sollen also die Punkte* $[x(t), y(t)]$ *für* $t \to \infty$ *einen oder mehrere Häufungspunkte in B besitzen. Es soll also im Inneren von B Punkte geben, denen* $[x(t), y(t)]$ *für beliebig große t beliebig nahe kommt. Am Rande von B und in singulären Punkten sollen dagegen solche Häufungspunkte nicht liegen. Dann ist die Kurve* $\mathfrak{C}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$ *entweder selbst eine geschlossene Kurve, oder aber die Häufungspunkte für* $t \to \infty$ *liegen auf einer anderen geschlossenen Integralkurve.*

Diese Aussage entspricht der schon für den Fall der Existenz der Grenzwerte gemachten besonderen Feststellung. Denn die einem singulären Punkte (a, b) entsprechende Lösung $x = a$, $y = b$ gehört zu den geschlossenen Lösungen, insofern als auf ihr zu verschiedenen Parameterwerten derselbe Punkt gehört.

Zum Beweise unterscheide ich zwei Fälle. Ich nehme zunächst an, ein Häufungspunkt gehöre der Lösung L selbst an. Die Lösung soll also einem ihrer Punkte für beliebig große t beliebig nahe kommen. Dann ist die Lösung notwendig geschlossen.

Als geschlossene Lösung wird also, um es noch einmal zu wiederholen, eine Lösung angesprochen, auf welcher zu einzelnen Punkten mehrere Parameterwerte gehören. D. h. also: einen solchen Punkt passiert die Kurve nicht allein für $t = t_0$, sondern noch für einen anderen Wert $t_0 + k$. Daraus folgt aber, daß auch beliebige Parameterwerte $t_0 + \tau$ und $t_0 + k + \tau$ dieselben Punkte ergeben (S. 55). Die sämtlichen Kurvenpunkte sind also durch die zwischen t_0 und $t_0 + k$ gelegenen Parameterwerte bereits erschöpft.

Ich will jetzt zuerst beweisen, daß die Lösung notwendig geschlossen ist, wenn einer ihrer zu $t \to \infty$ gehörigen Häufungspunkte auf ihr liegt. Wenn P ein solcher Häufungspunkt ist, so denke ich mir in demselben die Kurvennormale. Dieselbe muß in der Nähe von P unendlich oft von der Lösung getroffen werden, falls diese nicht geschlossen ist. Denn sei Q irgendein weiterer, genügend nahe bei P gelegener Punkt der Lösung. P gehöre zum Parameter p, Q zum Parameter q. Dann lehrt der Satz von der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangspunkten, daß in einem beliebig gegebenen Parameterintervall $p - \delta < t < p + \delta$ die Lösung von den zu den um $q - p$ größeren Parameterwerten $q - \delta < t < q + \delta$ gehörigen Lösungspunkten nur wenig abweicht, wofern nur Q hinreichend nahe bei P gewählt ist. Stellt man also diese Überlegung für eine gegen P konvergierende Folge von Punkten Q_ν an, deren Parameterwerte $q_\nu \to \infty$ streben, so erhält man unendlich viele Kurvenbogen, die beliebig nahe an dem um P abgegrenzten Bogen entlang laufen, wenn die Kurve nicht etwa selbst geschlossen ist. Dann fallen ja alle diese Bogen zusammen. Nehme ich also an, die Kurve sei nicht geschlossen, so müssen alle diese Bogen die Normale überschreiten, und zwar müssen sie alle in hinreichender Nähe von P bei wachsenden Parameterwerten die Normale im gleichen Sinne überschreiten. Auch dies folgt ja aus der Stetigkeitsbetrachtung, weil doch in hinreichender Nähe von P nur geringe Richtungsunterschiede der Integralkurven vorkommen. Dies aber führt zu einer gestaltlichen Unmöglichkeit. Denn P_1 sei z. B. ein weiterer Punkt der Lösung auf der Normalen. Der Kurvenbogen PP_1 und das Normalstück PP_1 begrenzen dann einen Bereich, aus welchem die Lösung nie wieder austreten oder in den sie nie wieder eintreten kann, da sie ja das Normalenstück PP_1, wenn überhaupt, so nur immer im selben Sinne überschreiten kann. Daraus folgt, daß auf der Normalen die Schnittpunkte in derselben Reihenfolge aufeinander folgen, wie die zugehörigen Parameterwerte auf der Kurve. Hier könnte also P nicht Häufungspunkt der Schnittpunkte sein. Die Lösung muß also in diesem Falle selbst geschlossen sein.

Ich betrachte nun den anderen Fall. P sei ein Häufungspunkt, der *nicht* auf der zu untersuchenden Lösung L liegt. Alsdann will ich zeigen, daß die durch P gehende Lösung L' geschlossen ist. Jedenfalls ist sofort zu sehen, daß jeder Punkt der durch P gehenden Lösung L' ein Häufungspunkt von L ist. Das folgt wie eben aus Stetigkeitsgründen durch Betrachtung einer sich gegen P häufenden Folge von Punkten von L. Sind nämlich S und S' genügend nahe beieinander gelegene Punkte von L und L', so betrachte man diejenigen Integralkurven, die für $t = t_0$ durch S oder S' gehen. Für ein beliebiges Interwall $t_0 \leqq t \leqq T$ sind sie dann um so weniger vonein-

ander verschieden, je näher S und S' beieinander liegen. Daher kann auch L' keinem singulären Punkt und auch nicht dem Rande von B beliebig nahe kommen, weil sonst dasselbe (gegen Annahme) für L zutreffen müßte[1]). Daher muß nun auch L' im Innern von B Häufungspunkte besitzen, die nicht singulär sind. Diese Häufungspunkte liegen aber notwendig auf L'. Anderenfalls sei R ein solcher Häufungspunkt von L'. Dann mache ich im Punkte R bei L' dieselbe Betrachtung wie im vorigen Falle im Punkte P bei L. Die durch R gehende Lösung heiße dann L''. Auf ihr errichte ich in R die Normale und schneide diese mit L'. Wieder erkenne ich, daß auf dieser Normalen die Schnittpunkte mit L' in derselben Reihenfolge liegen wie die zugehörigen Parameterwerte auf L'. Es seien also R_1, R_2, R_3 drei solche Schnittpunkte und $t_1 < t_2 < t_3$ die zugehörigen Parameterwerte. Nun aber kann man einsehen, daß zwischen R_1 und R_2 sowohl wie zwischen R_2 und R_3 die Normale nur einmal von L geschnitten werden kann. Daraus würde dann folgen, daß R_2 nicht Häufungspunkt von L sein kann. Denn an L' laufen doch, wie wir gerade sahen, Bogen von L entlang. Um also z. B. zu erkennen, daß die Normale zwischen R_1 und R_2 nur einmal von L geschnitten werden kann, muß man nur bemerken, daß alle etwa vorhandenen Überschreitungen, falls nur R_1, R_2, R_3 genügend nahe an R gewählt sind, im selben Sinne erfolgen müßten. Da aber der Bogen R_1R_2 von L' und das Geradenstück R_1R_2 einen Bereich begrenzen, müßten die Überschreitungen abwechselnd in der einen oder der anderen Richtung geschehen. Daher muß R auf L' liegen. Denn die gegenteilige Annahme führt zu Widersprüchen. Daher ist L' geschlossen.

Unser Satz ist damit bewiesen. Er kann aber noch durch die folgenden Bemerkungen ergänzt werden. Die Kurve L ist jedenfalls eine Spirale, die sich in immer engeren Windungen an L' heranlegt. L' nennt man einen *Grenzzykel*. Daraus ergibt sich weiter, daß alle Lösungen, welche nur irgendeinmal genügend nahe an L' herankommen, solche Spiralen sein müssen. Um das zu erkennen, errichte ich in einem Punkte R von L' eine Normale nach der Seite, auf der die Spirale liegt. Ich wähle die Normale so kurz, daß allemal die Spirale L die Normale im selben Sinne überschreitet. Dann wähle ich auf dieser Normalen irgendeinen Punkt und lege durch denselben eine Lösung. Auch diese schmiegt sich dann für $t \to \infty$ der Lösung L' an. Denn wenn etwa ihr Anfangspunkt zwischen den beiden Schnittpunkten R_1 und R_2 von[2]) L mit der Normalen liegt, so verläuft die neue Lösung immer auf derselben Seite von L in deren

[1]) In dem Falle also, wo neben anderen auch solche Häufungspunkte da sind, lehrt unsere Betrachtung, daß jedenfalls ein ganzer, beiderseits von singulären Punkten begrenzter Bogen von L' von Häufungspunkten besetzt ist.

[2]) R_2 sei der näher an R gelegene.

Nähe. Ich verfolge sie bis zum nächsten Schnittpunkt mit der Normalen. Der muß aber nun zwischen R_2 und R liegen, weil sonst die neue Lösung L schneiden müßte.

Ich schließe noch einige Betrachtungen über das Verhalten der Lösungen in der Umgebung einer geschlossenen Lösung an. Daß eine geschlossene Lösung von einer Schar geschlossener Lösungen umgeben sein kann, haben wir schon im vorigen Paragraphen am Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x$$

gesehen. Hier sind die Lösungen die Kreise um den Ursprung als Mittelpunkt. Daß auch in der Umgebung einer geschlossenen Lösung Spiralen liegen können, und noch manches andere, sieht man an dem Beispiel

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + \delta\,(x^2+y^2-1)\,x \sin\frac{1}{x^2+y^2-1} \\ \frac{dy}{dt} &= x + \delta\,(x^2+y^2-1)\,y \sin\frac{1}{x^2+y^2-1} \end{aligned}\right\} \text{ für } x^2+y^2 \neq 1.$$

Aber $\frac{dx}{dt} = -y$ und $\frac{dx}{dt} = x$ für $x^2+y^2=1$.

Führt man nämlich Polarkoordinaten ein ($x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$), so werden diese Gleichungen

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \delta r\,(r^2-1)\sin\frac{1}{r^2-1} \qquad \text{für } r \neq 1$$

$$\frac{dr}{\delta\vartheta} = 0 \qquad \text{für } r = 1\,.$$

Unter den Lösungen sind also den unendlich vielen Nullstellen von $\sin\frac{1}{r^2-1}$ entsprechend unendlich viele Kreise enthalten, die sich gegen den Kreis $r=1$ häufen. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden dieser Kreise verlaufen aber die Lösungen als Spiralen, die sich um jeden der beiden Grenzkreise herumwinden. Dazwischen hängt nämlich r monoton von ϑ ab.

Es fällt auf, daß sich die Differentialgleichung zwar in der Umgebung der isolierten Kreise analytisch verhält, daß sie aber auf dem Häufungskreis selbst nicht analytisch ist. Daß tatsächlich so etwas im analytischen Fall nicht vorkommen kann, ist leicht einzusehen. Ich will nämlich zeigen, daß in der Umgebung einer geschlossenen Lösung, auf der sich die Differentialgleichung analytisch verhält, entweder nur geschlossene Lösungen oder nur Spiralen liegen. Nehme ich nämlich an, gegen eine geschlossene Lösung häuften sich andere geschlossene Lösungen, dann errichte ich in einem Punkt P der Häufungslösung eine Normale, und führe auf dieser

Normalen den Abstand s von P als Parameter ein. Durch einen beliebigen Punkt s der Normalen lege ich eine Lösung. Diese verfolge ich in Richtung wachsender Parameter, bis sie zum ersten Male wieder die Normale trifft. Das geschehe bei der Bogenlänge s_1. Dann ist nach S. 44 s_1 eine analytische Funktion $f(s)$ für alle s, die zu Punkten der Normalen aus der Umgebung der Häufungslösung gehören. Für diejenigen unendlich vielen Werte s aber, welche geschlossene Lösungen bestimmen, ist dann $f(s) = s$. Da dies aber nun in einem Intervall, in dem $f(s)$ analytisch ist, unendlich oft der Fall ist, so ist nach bekannten Sätzen über analytische Funktionen für alle $s: f(s) = s$ und das heißt, daß alle Lösungen aus einer gewissen Umgebung der Häufungslösung geschlossen sein müssen.

Ich füge noch eine Bemerkung über das *Verhalten geschlossener Lösungen bei hinreichend geringer Abänderung der Differentialgleichung an.*

Daß bei hinreichend geringer Abänderung einer Differentialgleichung geschlossene Lösungen wieder in geschlossene Lösungen übergingen, wird man schon angesichts des letzten Beispieles, in dem man ja δ beliebig klein wählen kann, nicht behaupten wollen. Wohl aber kann man eine solche Aussage machen, wenn man von einer Differentialgleichung mit einer *einfachen und isolierten geschlossenen Lösung* ausgeht. Darunter will ich eine Lösung verstehen, an die sich von außen und innen andere Lösungen spiralig anschließen. Daher die Benennung isoliert. Es möge aber außerdem der Windungssinn der Spiralen außen und innen *derselbe* sein. Nur dann soll die geschlossene Lösung einfach heißen. Alsdann gilt der Satz, *daß eine jede andere Differentialgleichung, die in einer gewissen Umgebung dieser geschlossenen Lösung hinreichend wenig von der ersten verschieden ist, in dieser Umgebung selbst eine geschlossene Lösung besitzt.* Zum Beweise betrachte ich wieder die schon vorhin eingeführte Funktion $s_1 = f(s)$, die aber jetzt, wo die Differentialgleichung nur den in diesem Paragraphen allgemein üblichen Voraussetzungen genügt, eine stetige mit stetiger Ableitung versehene Funktion von s ist. Die entsprechende Funktion für die abgeänderte Differentialgleichung sei $s_1 = g(s)$. Hier ist nun dem geringen Unterschied beider Differentialgleichungen entsprechend die zweite Funktion nur wenig von der ersten verschieden. Nach unseren Voraussetzungen ist nun in der Umgebung der geschlossenen Kurve $f'(s)$ von einerlei Vorzeichen und es wird genau einmal $f(s) = s$. Daher gilt das gleiche auch für die Funktion $g'(s)$. Wir haben genau eine geschlossene Lösung für diese, die dazu noch in der Nähe der geschlossenen Lösung der ursprünglichen verläuft. Unsere Betrachtung läßt außerdem deutlich erkennen, inwiefern die Voraussetzung, daß die geschlossene Lösung einfach sei, wesentlich ist. Anderenfalls braucht tatsächlich die Gleichung $s = g(s)$ keine Lösung zu besitzen.

Über geschlossene Lösungen gilt nun weiter der folgende Satz: *Im Inneren einer jeden geschlossenen Lösung L liegt mindestens ein singulärer Punkt der Differentialgleichung.* Eine im Innern der geschlossenen Lösung L beginnende Integralkurve muß für alle Parameterwerte im Inneren bleiben. Wenn also im Inneren kein singulärer Punkt liegt, so muß eine solche Lösung entweder selbst geschlossen sein oder sich für $t \to \infty$ und für $t \to -\infty$ spiralig um je einen Grenzzykel herumwinden. Ich führe eine Hilfsfunktion $f(x_0, y_0)$ ein. Dieselbe sei gleich dem Inhalt, welchen die durch x_0, y_0 bestimmte Lösung umschließt, falls dieselbe geschlossen ist; sie sei aber dem von L umschlossenen Inhalt F gleich, wenn die durch x_0, y_0 bestimmte Lösung eine Spirale ist. Diese Funktion $f(x_0, y_0)$ besitzt dann im Inneren von L eine untere Grenze, welche kleiner ist als der von L umschlossene Inhalt F. Denn im Inneren muß ja mindestens eine weitere geschlossene Kurve verlaufen, weil sich sonst die Spiralen entweder einem singulären Punkt nähern müßten; oder aber es müßten die Spiralen sich für $t \to +\infty$ und für $t \to -\infty$ demselben Grenzzykel nähern. Das aber läßt sich durch die mehrfach benutzte Stetigkeitsbetrachtung widerlegen, weil ein Vorzeichenwechsel von t die Richtung eines jeden Linienelementes umkehrt. Ich markiere eine Folge von Punkten, deren zugehörige Funktionswerte gegen die untere Grenze konvergieren, und wähle die Punktfolge so, daß sie in L einen Grenzpunkt besitzt. Dieser Punkt (a, b) ist notwendig singulär. Anderenfalls ginge nämlich durch denselben eine Lösung L'. Wäre diese geschlossen, so gäbe es in ihrem Innern eine weitere geschlossene Lösung auf der $f(x_0, y_0)$ einen kleineren Wert als in der Nähe von (a, b) hätte. Das kann nicht sein. Also müßte die Lösung durch (a, b) eine Spirale sein. Dann wäre aber $f(a, b) = F$, also wäre auch für alle Punkte aus der Umgebung von (a, b) die Funktion $f(x_0, y_0) = F$. Denn durch alle diese Punkte gehen dann wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösungen vom Anfangspunkt Spiralen. Da somit die Annahme, daß (a, b) nicht singulär ist, zu Widersprüchen führt, muß (a, b) ein singulärer Punkt sein.

Man kann, wie man leicht sieht, und wie der Leser des näheren durchüberlegen möge, aus den vorausgegangenen Betrachtungen den folgenden Schluß ziehen:

Eine Lösung L, die für alle t ganz in einem einfach zusammenhängenden Bereich verläuft, der in seinem Inneren höchstens eine singuläre Stelle P enthält, ist entweder eine P umschließende geschlossene Kurve, oder ist eine Spirale, die sich einem solchen Grenzzykel anschließt, oder sie mündet im singulären Punkt, oder sie ist eine Spirale, die sich an eine Lösung anschließt, die sowohl für $t \to +\infty$ wie für $t \to -\infty$ im singulären Punkt mündet.

Ich beschließe diese gestaltlichen Betrachtungen mit dem folgenden nützlichen Satz. *Eine singuläre Stelle P sei von einem Kreise umschlossen, in dem keine weiteren singulären Stellen liegen. Von zwei Punkten seiner Peripherie mögen Lösungen L_1 und L_2 ausgehen, die in P münden. Diese mögen zusammen mit der Peripherie des Kreises einen Bereich G bestimmen, in welchem keine weitere in P mündende Lösung verläuft. Dann kann man um einen auf L_1 und einen auf L_2 gelegenen Punkt (P_1 und P_2) durch Kreisbogen aus B solche Gebiete ausschneiden, daß jede Lösung, die in dem einen beginnt, auch das andere Gebiet passiert.*

Ersichtlich ist dies eine Verallgemeinerung des Satzes von der stetigen Änderung der Lösungen bei Änderung der Anfangswerte. Man kann diesen ja offenbar in ganz ähnlicher Weise formulieren. Zum Beweise errichte ich in den beiden Punkten P_1 und P_2 Normalen, die in B hineinführen, und die so kurz sind, daß sie einander nicht treffen, und verbinden ihre Endpunkte in G durch einen Kurvenbogen. Der von $P_1\,P\,P_2\,P_1$ begrenzte Bereich sei B'. Alsdann lasse ich in der Nachbarschaft von P_1 auf der Normalen in R eine Lösung beginnen. Diese kann nicht in P münden. Sie kann nicht geschlossen sein, da es sonst neben P noch singuläre Punkte gäbe, sie kann sich aus demselben Grund keiner geschlossenen Lösung anschmiegen, sie kann sich aber auch keiner mit beiden Enden in P mündenden Lösung anschmiegen, da dies sich mit unseren Annahmen nicht verträgt. Also muß sie einmal wieder B' verlassen. Das muß auf einem Punkt der Verbindungslinie $P_1\,P_2$ geschehen. Ich darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß dieser Austritt S weiter von P_1 ab, also näher an P_2 heran, als der Beginn R liegt. Den Anfangspunkt lasse ich sich nun stetig auf P_1 hin bewegen. Dann bewegt sich der Endpunkt S stetig von P_1 weg einer Grenzlage zu. Ich behaupte, daß diese Grenzlage P_2 sein muß. Denn anderenfalls sei V der zwischen P_1 und P_2 gelegene Grenzpunkt. Ich behaupte, daß die durch ihn gehende Lösung in P münden müßte. Anderenfalls müßte sie irgendwo die Verbindungslinie $P_1\,P_2$ zum zweiten Male in einem inneren Punkte U schneiden. Dann aber müßten aus Stetigkeitsgründen alle in der Nachbarschaft von V beginnenden Lösungen auch ein zweites Mal in der Nähe von U die Verbindungslinie $P_1\,P_2$ treffen. Das widerspricht aber der Definition von V. Andererseits kann aber die in V beginnende Lösung nach Voraussetzung nicht in P münden. Also muß V mit P_2 zusammenfallen. Darin liegt aber der Beweis unseres Satzes. In G verlaufen also die Lösungen ähnlich wie in der Umgebung eines Sattels. Wegen weiterer Sätze über gestaltliche Verhältnisse sei auf die Arbeit von *Bendixson* verwiesen. Ich gehe jetzt zu Anwendungen auf konkrete Differentialgleichungen über.

Bemerkungen. 1. Wir haben die Sätze dieses Paragraphen für Differentialgleichungen gewonnen, welche der *Lipschitz*-Bedingung genügen. *Brouwer* hat in einigen Arbeiten über stetige Vektorverteilung auf Oberflächen in den Amsterdamer Berichten von 1910 den allgemeineren Fall von nur stetigen Differentialgleichungen behandelt und dort entsprechende Ergebnisse gewonnen. Namentlich gilt auch der Satz von S. 61 für diesen allgemeineren Fall.

2. Hinsichtlich der Übertragung dieser Sätze über den Gesamtverlauf von Lösungen auf Systeme ist noch wenig bekannt. Wir werden insbesondere später bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung näher auf die Dinge eingehen. Hier liegen weitergehende Untersuchuungen vor.

§5. Die Differentialgleichungen $x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + \mathfrak{P}(x, y)$.

Ihrer besonderen Wichtigkeit wegen will ich diese Differentialgleichungen nun zuerst behandeln. $\mathfrak{P}(x, y)$ sei dabei eine Potenzreihe, die keine Glieder von niedrigerer als der zweiten Dimension enthält und die in der Umgebung von $(0, 0)$ konvergiert. Von dem zu gewinnenden Ergebnis werden wir auch schon im folgenden Paragraphen eine Anwendung machen. Ich beginne mit dem Fall 1. ***m eine ungerade ganze Zahl, $a < 0$.***

Zunächst wählen wir eine Umgebung des Ursprungs, in welcher kein weiterer singulärer Punkt liegt. Als solche Umgebung kann ein parallel den Koordinatenachsen orientiertes Rechteck genommen werden. Es wird durch die Lösung $x = 0$ in zwei Teilrechtecke zerlegt, die wir getrennt zu betrachten haben. Zunächst wähle ich die Zahl $\delta > 0$ so, daß die Punkte $(0, \delta)$ und $(0, -\delta)$ dem Rechteck angehören und daß

$$a\delta + \mathfrak{P}(0, \delta) < 0$$
$$-a\delta + \mathfrak{P}(0, -\delta) > 0$$

ist. Dann kann man weiter die Zahl $\varepsilon > 0$ so wählen, daß das von den Geraden $x = \pm\varepsilon$, $y = \pm\delta$ begrenzte Rechteck ganz im erstgenannten enthalten ist und daß für $|x| \leqq \varepsilon$

$$a\delta + bx + \mathfrak{P}(x, \delta) < 0,$$
$$-a\delta + bx + \mathfrak{P}(x, -\delta) > 0$$

gilt. Ich betrachte dann zunächst denjenigen Teil des kleineren Rechtecks, in dem $x < 0$ ist. In ihm gibt es, wie ich zeigen will, genau eine Lösung der Differentialgleichung, welche im Ursprung mündet. Ich lege nun durch irgendeinen inneren Punkt P der Begrenzungsstrecke $y = \delta$ dieses Rechtecks eine Lösung der Differentialgleichung. Da in diesem Punkt und in seiner Umgebung $\frac{dy}{dx} > 0$ ist, so verläßt diese Lösung mit zunehmendem x das Rechteck. Ebenso steht es auf der gegenüberliegenden Rechteckseite. Verfolgt man daher eine solche Lösung für abnehmende x ins Rechteck hinein, so muß sie die Recht-

eckseite $x = -\varepsilon$ treffen. Ich lasse nun den Anfangspunkt P auf $y = \delta$ gegen den Punkt $(0, \delta)$ konvergieren. Die Punkte, in welchen die zugehörigen Lösungen die Rechtecksseite $x = -\varepsilon$ treffen, hängen dabei stetig von der Lage des Punktes P ab und rücken monoton auf die Rechteckseite $y = -\delta$ zu. Sie streben daher einer Grenzlage S zu, wenn P seiner angegebenen Grenzlage zustrebt. Legt man dann durch S eine Lösung, so muß dieselbe im Ursprung münden. Denn man kann sie bis zum Verlassen des Rechtecks verfolgen. Dies kann nur auf $y = \pm\delta$ oder im Ursprung geschehen. Denn $x = 0$ ist eine sonst von Singularitäten freie Lösung und vertikale Tangenten kommen auf der zu untersuchenden Lösung nicht vor. Wenn aber die Lösung durch S in einem inneren Punkt einer der beiden Rechteckseiten $y = \pm\delta$ endete, so müßte das aus Stetigkeitsgründen bei allen Lösungen durch S beiderseits benachbarte Punkte ebenso sein. Das widerspricht aber der Definition von S. Die Lösung durch S muß also im Ursprung münden. Dies ist aber auch die einzige in der Rechteckshälfte $x < 0$ gelegene Lösung, welche im Ursprung mündet. Anderenfalls seien nämlich $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei derartige Lösungen. Dann hat man

$$x^m \frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = (y_1 - y_2)\,(a + f(x)).$$

Hier ist $f(x) = \dfrac{\mathfrak{P}(x, y_1) - \mathfrak{P}(x, y_2)}{y_1 - y_2}$ eine Funktion von x, die sich nach Potenzen von x, y_1 und y_2 entwickeln läßt und die für $x = 0$ verschwindet. Daher gibt es eine Zahl σ derart, daß

$$|f(x)| < \left|\frac{a}{2}\right| \quad \text{für} \quad |x| < \sigma.$$

Ist dann $-\sigma < x_0 < 0$, so ist (für $x_0 < x < 0$)

$$y_1(x) - y_2(x) = [y_1(x_0) - y_2(x_0)]\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a + f(x)}{x^m}\, dx}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &> |y_1(x_0) - y_2(x_0)|\, e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{a}{x^m}\, dx} \\ &> |y_1(x_0) - y_2(x_0)| \end{aligned}$$

und das widerspricht der Annahme, daß $y_1(x)$ und $y_2(x)$ im Ursprung münden sollen. In der Rechteckhälfte $x < 0$ gibt es also genau eine im Ursprung mündende Lösung. Das gleiche ist in der Rechteckhälfte $x > 0$ der Fall. Das erkennt man am raschesten, indem man diesen Fall auf den vorigen durch Vorzeichenänderung von x zurückführt.

Ich komme zum Fall 2: ***m ungerade ganze Zahl, $a > 0$.***

Ich konstruiere ein Rechteck genau wie im vorigen Fall. Jetzt ist aber für $|x| < \varepsilon$

$$a\delta + bx + \mathfrak{P}(x, \delta) > 0,$$
$$-a\delta + bx + \mathfrak{P}(x, -\delta) < 0.$$

Ich betrachte zuerst die Hälfte $x > 0$ des Rechtecks. Eine in diesem beginnende Lösung kann bei abnehmendem x nach diesen Ungleichungen das Rechteck weder auf $y = +\delta$ noch auf $y = -\delta$ verlassen. Sie kann ihm aber auch nicht über $x = 0$ entrinnen. Sie muß also entweder im Ursprung münden oder geschlossen sein oder sich einer geschlossenen anschmiegen. Die beiden letzten Fälle sind ausgeschlossen, weil sonst im Rechteck weitere singuläre Punkte lägen. Also münden alle Lösungen im Ursprung. Ebenso schließt man in der Hälfte $x < 0$ für wachsende x. Jetzt ist also der Ursprung ein Knoten, insofern als alle im Rechteck beginnenden Lösungen im Ursprung münden.

Im Falle 3: ***m gerade ganze Zahl, $a < 0$*** sind keine neuen Erörterungen mehr nötig. Für $x < 0$ schließt man wie eben auf ein Knotengebiet und für $x > 0$ greift die Überlegung von Fall 1 wieder Platz. In $x > 0$ liegt also nur eine im Ursprung mündende Lösung.

Im Falle 4: ***m gerade ganze Zahl, $a > 0$*** schließt man für $x > 0$ wieder auf Knoten und für $x < 0$ auf eine einzige im Ursprung mündende Lösung.

Die Fälle $a = 0$ erfordern eine eindringendere Behandlung. Auch sie sind erledigt, wie wir sehen werden, wenn allgemein davon die Rede sein wird, wie man jede analytische Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{P}_1(x, y)}{\mathfrak{P}_2(x, y)}$$

in der Nähe des Ursprungs behandeln kann. Da wird sich zeigen, daß man alles auf die eben behandelten Typen zurückführen kann.

Es wird nun aber noch von Interesse sein, zu sehen, wie man in allen diesen Fällen die unter Umständen nur in einem Exemplar vorhandene, im Ursprung mündende Lösung wirklich berechnen kann. Das geschieht mit Hilfe einer von *Bendixson* herrührenden Methode der sukzessiven Approximationen. Man kann sie auch im Knotenfall zur Berechnung der Lösungen bis in den Ursprung hinein verwenden. Überhaupt erhält man so auch eine neue rechnerische Herleitung unserer Ergebnisse. *Perron* hat in einer schönen Arbeit (Math. Annalen 75) mit dieser Methode dann noch wesentlich allgemeinere Differentialgleichungen von der Form

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

erledigen können, wo dann für $\varphi(x)$ und $f(x, y)$ nur gewisse Stetigkeits-

bedingungen erfüllt zu sein brauchen. Ich möchte mich aber hier damit begnügen, für den erwähnten Fall die Methode zu schildern.

Es genügt, den Fall $m = 1$, $a < 0$ zu betrachten.

Dann nehme man als erste Näherung $y_0 = 0$ und bestimme y_1 aus

$$x \frac{dy_1}{dx} = ay_1 + bx + \mathfrak{P}(x, 0)$$

so, daß entweder $\lim_{x \to +0} y_1(x) = 0$ oder $\lim_{x \to -0} y(x) = 0$ ist. Ich will den zweiten Fall weiter verfolgen. Man überlegt sich leicht, daß

$$y_1 = (-x)^a \int_x^0 [bx + \mathfrak{P}(x, 0)](-x)^{a-1} dx$$

der gestellten Forderung genügt. Dann trage man y_1 ein und setze

$$y_2 = (-x)^a \int_x^0 [bx + \mathfrak{P}(x, y_1)](-x)^{a-1} dx$$

So fahre man weiter. Die gefundenen Funktionen $y_\varkappa$ konvergieren dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion y, welche der Differentialgleichung genügt und für die $\lim_{x \to -0} y(x) = 0$ ist. Das Nähere der Beweisführung möge der Leser sich entweder selbst zurechtlegen oder bei *Bendixson* oder *Perron* nachlesen.

§ 6. Die Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By + \delta(x, y)}{Cx + Dy + \varepsilon(x, y)}$.

Unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen kann man den Satz aussprechen, daß für das Verhalten der Lösungen dieser Differentialgleichung in der Umgebung von $x = y = 0$ das Verhalten der Lösungen von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By}{Cx + Dy}$$

in der Umgebung desselben Punktes maßgebend ist. Der Punkt $x = y = 0$ soll auch für die vorgelegte Differentialgleichung ein singulärer sein, es sei also $\delta(0, 0) = \varepsilon(0, 0) = 0$. Obwohl unsere Überlegungen meist viel allgemeiner gelten, wollen wir uns weiter einer formal einfacheren Darstellung zuliebe auf den Fall beschränken, daß δ und ε als Potenzreihen in x, y gegeben sind, die mit Gliedern frühestens zweiter Dimension beginnen. Die Determinante der linearen Glieder $AD - BC$ sei von Null verschieden. Wir schreiben außerdem die Differentialgleichung in Parameterdarstellung:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Cx + Dy + \mathfrak{P}_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Ax + By + \mathfrak{P}_2(x, y). \end{cases}$$

Ich beginne mit dem einfachsten Fall. *Die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der charakteristischen Gleichung*

$$(I') \qquad \begin{vmatrix} C-\lambda & D \\ A & B-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

seien reell und mit dem gleichen Vorzeichen versehen. Dann läßt sich eine Umgebung um den Ursprung abgrenzen, derart, daß die durch die Punkte dieser Umgebung hindurchgehenden Lösungen alle in den singulären Punkt hineinlaufen.

Wie wir wissen, kann man durch eine Koordinatentransformation die Differentialgleichungen auf die Gestalt

$$(I'') \qquad \begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1 + \mathfrak{P}_1(x_1, y_1) \\ y_1' &= \mu x_1 + \lambda_2 y_1 + \mathfrak{P}_2(x_1, y_1) \end{aligned}$$

bringen. Dabei sind λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung und μ ist nur dann von Null verschieden, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ ist. $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ sind wieder zwei Potenzreihen, die keine Glieder nullter oder erster Dimension enthalten. Ich nehme zunächst $\mu = 0$ an. Dann betrachte ich $x_1^2 + y_1^2$, d. i. das Quadrat der Entfernung der Punkte auf einer Lösungskurve vom Ursprung. Man hat durch Differenzieren

$$x_1 x_1' + y_1 y_1' = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + x_1 \mathfrak{P}_1 + y_1 \mathfrak{P}_2 .$$

Grenzt man somit eine genügend kleine Umgebung um den Ursprung ab, so besitzt darin dieser Ausdruck stets dasselbe Vorzeichen wie $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$. Dies ist aber eine definite Form, da λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen besitzen. Sind z. B. λ_1 und λ_2 positiv, so nähert sich also bei abnehmendem Parameterwert die Lösungskurve ständig dem Ursprung. Die Lösungskurven münden alle im Ursprung. Wir werden später sehen, daß sie sogar in bestimmten Richtungen einmünden. Vorläufig zeigen wir aber nur, daß sie sich asymptotisch dem Ursprung nähern. Denn käme z. B. die Lösungskurve nicht auf näher als σ an den Ursprung heran, so wäre auf derselben die Ableitung $x_1 x_1' + y_1 y_1'$ ständig oberhalb einer angebbaren Schranke. Und daraus könnte man abschätzen, daß einer Änderung des Parameters t etwa um die Einheit eine Verkleinerung der Entfernung um einen Betrag entsprechen müßte, der selbst oberhalb einer wesentlich positiven Schranke bliebe. Das widerspricht aber der Annahme, daß die Entfernung der Lösungskurve oberhalb σ bleibt für beliebig große Werte von t.

Ähnlich kann man im Falle schließen, wo $\mu \neq 0$, also die beiden Größen λ_1 und λ_2 gleich sind. Dann betrachte man den Ausdruck

$$x_1^2 + k y_1^2,$$

der ja für positives k definit ist. Differentiation liefert

$$x_1 x_1' + k y_1 y_1' = \lambda_1 x_1^2 + k\mu x_1 y_1 + k\lambda_1 y_1^2 + x_1 \mathfrak{P}_1 + k y_1 \mathfrak{P}_2$$

und das ist nun für genügend kleines positives k in einer genügend kleinen Umgebung des Ursprungs wieder definit. Daher schließt man genau wie eben, daß alle Lösungen in den Ursprung einmünden.

Offenbar versagen diese Überlegungen für den Fall, wo die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zwar reell sind, aber verschiedenes Vorzeichen besitzen. Wohl aber bleiben sie anwendbar in dem Falle, wo die Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert imaginär sind. Setzt man dann

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\mu_2; \qquad \lambda_2 = \mu_1 - i\mu_2,$$

so kann man durch Koordinatentransformation nach S. 52 die Differentialgleichungen auf die Form

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1' = \mu_1 x_1 + \mu_2 y_1 + \mathfrak{P}_1(x_1, y_1) \\ y_1' = -\mu_2 x_1 + \mu_1 y_1 + \mathfrak{P}_2(x_1, y_1) \end{cases}$$

bringen, wo wieder die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ erst mit den Gliedern zweiter Dimension beginnen. Wir betrachten wieder $x_1^2 + y_1^2$, dessen Ableitung

$$x_1 x_1' + y_1 y_1' = \mu_1 (x_1^2 + y_1^2) + x_1 \mathfrak{P}_1 + y_1 \mathfrak{P}_2$$

ist. Betrachten wir den Fall $\mu_1 \neq 0$ näher. In einer genügend kleinen Umgebung des Ursprungs ist also wieder $x_1 x_1' + y_1 y_1'$ definit, und daraus folgt wieder, daß alle Lösungen dieser Umgebung in den Ursprung einmünden. Ist aber $\mu_1 = 0$, so gilt ein solcher Schluß nicht und die Erinnerung an den früher betrachteten Strudelpunkt lehrt auch, daß jetzt nicht mehr immer die Lösungen in den Ursprung münden müssen. Zur Klärung dieser Dinge sind tiefergreifende Erörterungen nötig, die wir noch zurückstellen wollen. *Zur Entscheidung darüber, ob jetzt Strudel oder Wirbel vorliegt, reichen nicht mehr die Glieder erster Ordnung hin.* Unsere Betrachtung läßt bisher noch nicht den spezifischen Unterschied zwischen Knoten und Strudel oder Wirbel erkennen, den wir in dem vorvorigen Paragraphen bei den homogenen Gleichungen herausgearbeitet hatten. Bevor wir uns also dem noch ausstehenden Fall reeller λ_1 und λ_2 mit verschiedenem Vorzeichen zuwenden, wollen wir diese Frage noch erörtern. Es wird sich wieder zeigen, daß bei reellen Wurzeln gleichen Vorzeichens stets der Knotenfall vorliegt. Da gehen also, außer bei $\lambda_1 = \lambda_2$, die Lösungen alle bis auf zwei unter Berührung derselben Geraden in den Ursprung hinein. Diese beiden laufen in zwei um π verschiedenen Richtungen in den Ursprung hinein. Bei komplexen Wurzeln aber liegt Strudel oder Wirbel vor.

In dieser Hinsicht wollen wir einen von *Bendixson* herrührenden Satz angeben, der in gewissem Maße die Entscheidung liefert, wenn er auch die vorgelegte Frage nicht vollständig erledigt. Der Satz bezieht sich sogar auf etwas allgemeinere Differentialgleichungen.

Ich will ihn in dieser allgemeinen Fassung aussprechen, dann aber nur für unseren Fall beweisen. An der Beweismethode wird dabei nichts Wesentliches verloren gehen. Der Satz bezieht sich auf Differentialgleichungen von der Form

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_m + \mathfrak{P}_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = Y_m + \mathfrak{P}_2(x,y). \end{cases}$$

Dabei sind X_m und Y_m ganze rationale homogene Funktionen m-ter Ordnung, während die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Glieder m-ter oder niedrigerer Ordnung nicht enthalten. Der Satz lautet dann: *Eine Lösung der Differentialgleichung, welche im Ursprung mündet, ist entweder eine Spirale oder sie mündet mit einer bestimmten Tangente ein. Diese genügt der Gleichung* $x Y_m - y X_m = 0$.

Ich beschränke mich, wie schon gesagt, beim Beweis auf den Fall $m = 1$. Man führt Polarkoordinaten ein: $x = \varrho \cos\vartheta$, $y = \varrho \sin\vartheta$. Die Differentialgleichungen werden dann

$$(3) \qquad \begin{cases} \varrho' = \varrho\{\cos\vartheta \cdot X_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \sin\vartheta\, Y_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\} + \varrho^2 \mathfrak{P}_1(\varrho, \vartheta) \\ \vartheta' = \cos\vartheta \cdot Y_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta) - \sin\vartheta X_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \varrho\, \mathfrak{P}_2(\varrho, \vartheta) \end{cases}$$

Es gibt dann eine Zahl R, so daß die beiden Funktionen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sich für $\varrho \leqq R$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ nach Potenzen von ϱ entwickeln lassen. Man kann nun eine Zahl T so bestimmen, daß für $t > T$ die nun näher zu betrachtende in den Ursprung mündende Lösung ganz im Kreise $\varrho \leqq R$ bleibt. Denn während man sich auf der Lösung dem Ursprung nähert, muß $t \to \infty$ streben. Jedenfalls darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß man für wachsende t auf der Lösung dem singulären Punkt zustrebt. Bloße Vorzeichenänderung von t bringt dies ja nötigenfalls mit sich. Wäre nun aber für ein endliches $t = \tau$

$$\lim_{t \to \tau} x(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \tau} y(t) = 0,$$

so erhielten wir nach S. 31 einen Widerspruch mit der Tatsache, daß es doch eine andere Lösung gibt, welche für $t = \tau$ die Werte $x = 0$ und $y = 0$ annimmt; das ist nämlich die triviale Lösung $x = 0$, $y = 0$, für die also x und y für alle t den Wert Null haben.

Wir dürfen also annehmen, daß für $t > T$ die zu betrachtende Lösung ganz im Kreise $\varrho \leqq R$ liegt und daß sie für $t \to \infty$ gegen den Ursprung konvergiert. Wir hatten schon Polarkoordinaten ϱ, ϑ eingeführt. Deuten wir diese wieder als rechtwinklige Koordinaten einer neuen Ebene, so verläuft die zu betrachtende Lösung für $t > T$ ganz im Streifen $0 \leqq \varrho \leqq R$ und strebt für $t \to \infty$ gegen die Gerade $\varrho = 0$. Wir fragen nach den Grenzpunkten, die die Punkte der

Kurve dabei auf $\varrho = 0$ bestimmen und beweisen, daß es deren nicht mehr als einen geben kann. Dieser Nachweis ergibt sich besonders leicht in dem Fall, wo $xY_1 - yX_1$ nicht identisch verschwindet. Dann gibt es nämlich nur endlich viele Werte ϑ für die

$$(4) \qquad \cos\vartheta \cdot Y_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta) - \sin\vartheta \cdot X_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = 0$$

ist. Wenn dann unsere Lösung auf $\varrho = 0$ zwei verschiedene Grenzpunkte hat, $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \beta$, so wählen wir einen Wert $\vartheta = \gamma$ zwischen beiden, für den $\cos\gamma \cdot Y_1(\cos\gamma, \sin\gamma) - \sin\gamma \cdot X_1(\cos\gamma, \sin\gamma) \neq 0$ ist und wählen R so klein, daß für $\vartheta = \gamma$, $\varrho \leqq R$ auch $\vartheta' \neq 0$ ist. Dann kann also die den Streifen $0 \leqq \varrho \leqq R$ durchsetzende Gerade $\vartheta = \gamma$ von unserer Lösung nur einmal überschritten werden, denn wegen des festen Vorzeichens von ϑ' müßten alle Überschreitungen in der gleichen Richtung geschehen, also entweder in Richtung wachsender oder in Richtung abnehmender ϑ. Daher muß unsere Lösung entweder ständig oberhalb oder ständig unterhalb der Geraden $\vartheta = \gamma$ bleiben. Daraus folgt, daß sie nur einem Grenzpunkt auf $\varrho = 0$ zustreben kann. Liegt dieser im Unendlichen, so bedeutet das offenbar, daß die entsprechende Lösung in der x-y-Ebene eine Spirale ist, da sie jede Gerade durch den Ursprung dann unendlich oft durchsetzt. (Die Geraden $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi$ ... der ϱ-ϑ-Ebene geben ja alle dieselbe Gerade der x-y-Ebene.) Ist der Grenzpunkt aber ein endlicher Punkt $\vartheta = \alpha$, so bedeutet dies, daß unsere Lösung in der x-y-Ebene in bestimmter Richtung α in den Ursprung einmündet. Diese Richtung ist durch die ϑ-Koordinate des Punktes auf $\varrho = 0$ bestimmt, dem die Lösung in der ϱ-ϑ-Ebene zustrebt. Dieser ϑ-Wert aber genügt der Gleichung (4). Denn auch $\varrho = 0$ ist Lösung der Differentialgleichungen (3). Der Grenzpunkt $\vartheta = \alpha$ muß also ein singulärer Punkt für diese Differentialgleichungen sein und daher muß dort (4) erfüllt sein. Das bedeutet aber doch, daß längs der Tangente

$$x Y_1 - y X_1 = 0$$

ist.

Nun bleibt noch der Fall übrig, daß $x Y_1 - y X_1$ identisch verschwindet. Dann ist offenbar

$$x Y_1 = y X_1 = a_0 xy,$$

wo a_0 konstant und $\neq 0$ ist.

Also wir sind in dem Falle, wo $X_1 = a_0 x$ und $Y_1 = a_0 y$. In Polarkoordinaten werden dann die Gleichungen:

$$\varrho' = \varrho a_0 + \varrho^2 \mathfrak{P}_1(\varrho, \vartheta)$$
$$\vartheta' = \varrho^{r+1} \cdot S_{2+r}(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \varrho^{r+2} \mathfrak{P}_2(\varrho, \vartheta).$$

Dabei ist r eine passende positive oder verschwindende Zahl und S_{2+r} ein Polynom, von der durch den Index angegebenen Ordnung.

Durch die Gleichung $\frac{dt_1}{dt} = \varrho$ führen wir nun längs der zu untersuchenden Lösung einen neuen Parameter t_1 ein. Dann werden die Differentialgleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} \varrho' &= a_0 + \varrho\,\mathfrak{P}_1 \\ \vartheta' &= \varrho^r S_{2+r} + \varrho^{r+1}\mathfrak{P}_2 . \end{aligned}$$

Nun sei $\vartheta = \alpha$ irgendein Punkt auf $\varrho = 0$. Es ist ein regulärer Punkt für das Gleichungssystem (5). Daher geht durch diesen Punkt genau eine Lösung. Ihr entspricht in der x-y-Ebene eine Lösung, die in der Richtung α in den Ursprung einmündet. Umgekehrt entspricht auch jeder Lösung der Gleichungen (2), welche in der Richtung α in den Ursprung einmündet, eine Lösung von (5), welche durch $\varrho = 0$, $\vartheta = \alpha$ hindurchgeht. Da dies aber ein regulärer Punkt ist, so gibt es auch nur eine Lösung von (2), welche unter der Richtung α in den Ursprung einmündet. Ich betrachte weiter die durch $\varrho = 0$, $\vartheta = \alpha + 2\pi$ gehende Lösung von (5). Ihr entspricht dieselbe Lösung von (2). Beide Kurven der ϱ-ϑ-Ebene schneiden für hinreichend kleines R aus dem Streifen $0 \leqq \varrho \leqq R$ ein Gebiet G aus, das als umkehrbar eindeutiges Bild von $\varrho \leqq R$ der x-y-Ebene anzusprechen ist. In diesem Gebiet müssen nun die Bilder aller anderen Lösungen von (2) liegen, welche durch Punkte $\varrho \leqq R$ hindurchgehen. Da nun bisher ja α ganz beliebig war, so haben wir in jeder Richtung durch den Ursprung genau eine Lösung. Dieser entspricht eine durch $\varrho = 0$, $\vartheta = \alpha$ hindurchgehende. Alle so erhaltenen Lösungen von (5) bedecken nun aber offenbar das Gebiet G vollständig; d. h. durch jeden Punkt dieses Gebietes geht genau eine der gefundenen Lösungen hindurch. Das folgt sofort daraus, daß diese Lösungen stetig vom Anfangspunkt $\varrho = 0$, $\vartheta = \alpha$ abhängen. Daher sind damit alle Lösungen von (2) im Gebiete $\varrho \leqq R$ erschöpft.

Wenden wir nun diesen Satz von *Bendixson* an. Er lehrt dann jedenfalls, daß in dem Falle, wo unsere charakteristische Gleichung komplexe Wurzeln hat, nur spiralige Lösungen in den Ursprung münden können. Denn die Gleichung für die Tangenten wird dann, unter Zugrundelegung der Normalform (1) unserer Differentialgleichungen:

$$\mu_2 (x_1^2 + y_1^2) = 0,$$

und diese hat ja keine reellen Nullgeraden. Aber aus dem Satz von *Bendixson* ergibt sich im allgemeinen nicht, daß im Falle reeller Wurzeln der charakteristischen Gleichungen die Lösungen alle unter bestimmten Tangentenrichtungen in den Ursprung münden. Diesen Schluß läßt nach unserem Beweisgang der Satz von *Bendixson* nur in dem Falle zu, wo $x\,Y_1 - y\,X_1$ identisch verschwindet. Das ist also der Fall, wo in (I″) $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu = 0$ ist. Überhaupt folgt aus diesem Satze, daß *alle* dem Nullpunkt zustrebenden Lösungen unter bestimmten

Richtungen dort ankommen, falls das nur bei einer derselben so ist. Daß auch in dem noch ausstehenden Fall kein Wirbel vorliegt, werden wir bald erkennen.

In den bisher betrachteten Fällen gehen jedenfalls alle einer gewissen Umgebung des Ursprungs angehörige Lösungen durch diesen hindurch, falls nur eine derselben das tut. Wir wenden uns jetzt dem Falle zu, daß die charakteristische Gleichung reelle Wurzeln von verschiedenem Vorzeichen besitzt. Diese seien dann $\lambda_1 = \lambda > 0$ und $\lambda_2 = -\lambda' < 0$. Dann kann man die Differentialgleichungen auf die Form

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + \mathfrak{P}_1(x, y) \\ y' &= -\lambda' y + \mathfrak{P}_2(x, y) \end{aligned} \tag{6}$$

bringen. Da es uns vor allem auf die den Ursprung passierenden Lösungen ankommt, so machen wir die Substitution $y = xy_1$. Dann finden wir für y_1 die Differentialgleichung

$$x \frac{dy_1}{dx} = \frac{-(\lambda+\lambda')y_1 + x\mathfrak{P}_1(x_1, y_1)}{\lambda + x\mathfrak{P}_2(x_1, y_1)}. \tag{7}$$

Dabei sind wieder $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ neue Potenzreihen, die nach Potenzen von x und y_1 fortschreiten. Wir müssen diejenigen Lösungen dieser Gleichung aufsuchen, die für $x \to 0$ endlich bleiben, oder doch so schwach unendlich werden, daß $xy_1 \to 0$ strebt. Wir wollen zunächst diejenigen Lösungen von (7) suchen, die durch $x = 0$, $y_1 = 0$ hindurchgehen. Dazu gehört namentlich $x = 0$ selbst. Dieser Lösung entspricht aber bei den Gleichungen (6) nur die triviale Lösung $x = 0$, $y = 0$. Wir wissen aber von S. 63/64, daß es noch genau zwei weitere Lösungen von (7) durch den Ursprung gibt. Diesen entsprechen dann Lösungen von (6), welche durch den Ursprung gehen und dort $y = 0$ berühren. Es gibt deren also genau zwei, von denen übrigens die eine die positive, die andere die negative x-Achse berührt. Genau ebenso können wir dann mittels der Substitution $x = yx_1$ zwei Lösungen von (6) ausfindig machen, welche durch den Ursprung gehen und dort $x = 0$ berühren. Damit sind dann alle Lösungen bestimmt, welche im Ursprung eine der beiden Koordinatenachsen berühren. Der Satz von *Bendixson* lehrt aber dann weiter, daß alle dem Ursprung zustrebenden Lösungen von (6) dort unter bestimmten Tangenten ankommen. Weiter lehrt der Satz von *Bendixson*, daß als solche Tagentenrichtungen nur die beiden Koordinatenachsen in Betracht kommen. Daher haben wir dann alle Lösungen durch den Ursprung gefunden. Es sind genau vier. Je zwei berühren eine der beiden Koordinatenachsen von verschiedenen Seiten herkommend.

Ich stelle nun zunächst zusammen, was wir bis jetzt für die in der Überschrift dieses Paragraphen genannten Differentialgleichungen erreicht haben. Im Falle reeller Wurzeln der charakteristischen

Gleichung gehen bei gleichem Vorzeichen sämtliche einer gewissen Umgebung des Ursprungs angehörige Lösungen in diesen hinein. Das gleiche ist im Falle komplexer Wurzeln der Fall, es sei denn, daß die Wurzeln rein imaginär sind. Dieser Fall ist noch unentschieden. Im Falle reeller Wurzeln von verschiedenem Vorzeichen gehen genau vier Lösungen in den Ursprung hinein. Im Falle komplexer Wurzeln wurde weiter erkannt, daß die im Ursprung mündenden Lösungen Spiralen sind. Daß sie im Falle reeller Wurzeln gleichen Vorzeichens in bestimmten Tangentenrichtungen einmünden, wurde erst in einem Spezialfall gezeigt und bleibt jetzt noch allgemein zu zeigen. Unsere letzthin angestellten Betrachtungen setzen uns dazu jetzt instand. Die Entscheidung fällt besonders leicht in dem Fall, wo die beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschieden sind. Die beiden in Betracht kommenden Tangentenrichtungen sind dann aus

$$x(Ax+By) - y(Cx+Dy) = 0 \tag{8}$$

zu bestimmen. Sie sind, wie man leicht sieht, verschieden, sind es doch die Richtungen der geradlinigen durch den Ursprung gehenden Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichungen. Wir dürfen das Koordinatensystem so legen, daß die Koordinatenachse $x = 0$ in keine dieser Richtungen fällt. Wir machen in den Gleichungen (I) die Substitution: $y = x\eta$. Sie führt uns auf die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{A+B\eta-\eta(C+D\eta)+x\mathfrak{P}_1(x,\eta)}{xC+Dx\eta+x^2\mathfrak{P}_2(x,\eta)} \tag{9}$$

für η. Ihre auf der Lösung $x = 0$ gelegenen singulären Punkte werden durch

$$A+B\eta-\eta(C+D\eta) = 0 \tag{9'}$$

gegeben. Es sind also deren zwei voneinander verschiedene, deren η-Koordinaten mit den Richtungen der eventuellen Tangenten übereinstimmen. In der Umgebung dieser beiden singulären Stellen gehört diese Differentialgleichung dem in der Paragraphenüberschrift genannten Typus an. Wie man aus der Lösung $x = 0$ sieht, sind die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichungen beide Male reell.

Daher lehren die Betrachtungen dieses Paragraphen, daß durch jeden der beiden singulären Punkte außer $x = 0$ noch weitere Lösungen hindurchgehen. Daraus folgt, durch Eintragen dieser für $x \to 0$ gegen bestimmte Grenzwerte konvergierenden Funktionen in $y = \eta x$, daß durch den Ursprung gewisse Lösungen von (I) mit bestimmter Tangentenrichtung hindurchgehen. Daher gehen nach S. 71/72 alle im Ursprung mündenden Lösungen in bestimmten Richtungen in diesen Punkt hinein. Gleichzeitig wird erkannt, daß in jeder der beiden möglichen Richtungen Lösungen im Ursprung münden.

Nunmehr ist es leicht, zu zeigen, daß tatsächlich ein Knotenpunkt vorliegt, daß also tatsächlich alle Lösungen bis auf zwei mit der einen

der beiden Tangenten einmünden. Zu dem Zweck müssen wir zeigen, daß der eine der beiden singulären Punkte von (9) auf $x = 0$ ein Knoten, der andere ein Sattel ist, daß also in den einen alle, in den anderen nur vier Lösungen einmünden. Zwei von diesen vier werden durch $x = 0$ selbst absorbiert, den beiden anderen entsprechen dann zwei mit der einen der beiden möglichen Tangenten einmündende Lösungen von (I), während alle übrigen dem Verhalten des anderen singulären Punktes von (9) entsprechend in der anderen Richtung einmünden. Um nun diese Verhältnisse der beiden singulären Punkte von (9) einzusehen, muß man sich ihre charakteristischen Gleichungen ansehen. Falls η_1 und η_2 die beiden singulären Punkte auf $x = 0$ sind, so werden, wie man leicht nachprüft,

$$(C + D\eta_1 - \mu)(D(\eta_1 - \eta_2) + \mu) = 0$$

und

$$(C + D\eta_2 - \mu)(D(\eta_2 - \eta_1) + \mu) = 0$$

ihre charakteristischen Gleichungen. Um zu sehen, daß im einen Fall die beiden Wurzeln verschiedenes, im anderen aber beide gleiches Vorzeichen haben, ist nur festzustellen, daß das Produkt aller vier negativ ist. Dies Produkt ist aber

$$-(C + D\eta_1)(C + D\eta_2)\, d^2 (\eta_1 - \eta_2)^2 .$$

Und das ist wegen (9′) gleich

$$-(CB - AD)\, d^2 \cdot (\eta_1 - \eta_2)^2 .$$

Diese Determinante ist aber positiv, denn nach (I′) ist sie das Produkt der beiden $\lambda_1 \lambda_2$, die gleiches Vorzeichen haben.

Etwas weitläufiger ist es, die gleichen Feststellungen im Falle gleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu machen. Wir knüpfen an (I″) an, wo wir $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu \neq 0$ zu nehmen haben. Der Fall $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu = 0$ ist ja bereits erledigt.

Hier liegen aber nun gerade die Verhältnisse vor, die wir bei (9) zu vermeiden suchten. Denn $x = 0$ wird jetzt gerade die einzige noch mögliche Tangentenrichtung. Daher machen wir jetzt in (I″) die Substitution $x_1 = y_1 \xi$ und schreiben dann wieder y statt y_1. So bekommen wir

$$\xi' = \frac{-\mu \xi^2 + y \mathfrak{P}_1(\xi, y)}{\lambda_1 y + \mu \xi y + y^2 \mathfrak{P}_2(\xi, y)}, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen in ξ, y sind. Jetzt sind wir also auf eine Differentialgleichung von der in diesem Paragraphen immer betrachteten Gestalt gestoßen, bei der aber die Koeffizientendeterminante der linearen Glieder Null ist. Die charakteristische Gleichung hat jetzt eine verschwindende und eine nicht verschwindende Wurzel. Für uns handelt es sich nur darum, zu erkennen, daß mindestens eine von $y = 0$ ver-

schiedene Lösung dieser Gleichung im Ursprung mündet. Denn $y = 0$ entspricht ja der trivialen Lösung $x = 0$, $y = 0$ der Gleichung (I″). Als Gleichung für die möglichen Tangenten ergibt sich jetzt $\xi y = 0$. Wir suchen also eine Lösung zu bestimmen, die in der Richtung $\xi = 0$ in den Ursprung mündet. Dazu machen wir den Ansatz $\xi = yz$. Das führt zu der folgenden Differentialgleichung für z:

$$z' = \frac{-\lambda_1 z + \mathfrak{P}_1(y,z)}{\lambda_1 y + \mathfrak{P}_2(y,z)}.$$

Dabei sind wieder $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen, die nur Glieder zweiter und höherer Ordnung enthalten. Daß aber diese Differentialgleichung Lösungen besitzt, welche im Ursprung münden, ist uns bereits bekannt.

So haben wir also mindestens eine Lösung von (I″) gefunden, die in Richtung von $x = 0$ im Ursprung mündet. Nach dem Satz von *Bendixson* münden daher alle in bestimmten Richtungen im Ursprung. Da aber nur die Richtung $x = 0$ in Betracht kommt, so münden alle Lösungen in dieser Richtung im Ursprung.

Damit ist nun die Diskussion der Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax+By+\mathfrak{P}_1(x,y)}{Cx+Dy+\mathfrak{P}_2(x,y)}$$

in dem in Aussicht genommenen Falle, daß $AD - BC \neq 0$ ist, zu Ende geführt. Man kann das Ergebnis dahin aussprechen, daß für das qualitative Verhalten der Lösungen in der Nähe des Ursprungs in der Regel allein die linearen Glieder maßgebend sind. Diese bestimmen sogar die Richtungen, in welchen die Lösungen im Ursprung münden. Freilich konnten wir bisher im Falle rein imaginärer Wurzeln der charakteristischen Gleichungen nicht den Wirbelfall vom Strudelfall trennen. Hier sind eben tatsächlich die linearen Glieder nicht mehr allein maßgebend. Das erkennt man sofort an zwei Beispielen. So wird

$$y' = \frac{-x-2x^3}{y+2y^3}$$

durch die geschlossenen Kurven

$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = \text{konst.}$$

gelöst. Hier liegt also ein Wirbel vor. Dagegen liegt bei

$$y' = \frac{-x-y(x^2+y^2)}{y-x(x^2+y^2)}$$

ein Strudel vor. Denn in Polarkoordinaten wird diese Gleichung

$$\varrho' = \varrho^3.$$

Ihre Lösungen sind die Spiralen $\varrho^2 = -\frac{1}{2(\vartheta+c)}$.

Da wir jetzt an eine Stelle gekommen sind, wo im Falle einer nichtanalytischen Differentialgleichung die Dinge anders liegen können,

so will ich auch dafür noch ein Beispiel geben. Ich betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + (x^2+y^2)\, y \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}}{-y + (x^2+y^2)\, x \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}}.$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so wird sie

$$\varrho' = \varrho^3 \sin \frac{1}{\varrho^2}$$

und daraus erkennt man, den unendlich vielen gegen Null sich häufenden Nullstellen der rechten Seite entsprechend, daß der Differentialgleichung durch unendlich viele Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt genügt wird. In einem von zwei aufeinanderfolgenden derartigen Kreisen begrenzten Ring liegen aber keine weiteren geschlossenen Integrale. Denn in einem solchen Ring ist ϱ' von einerlei Vorzeichen. Die hier verlaufenden Integralkurven wickeln sich also spiralig um die Begrenzungskreise herum.

Kehren wir zurück zum analytischen Fall. Es hat seinen Sinn, danach zu fragen, wie man nun bei einer vorgelegten Differentialgleichung entscheiden kann, ob sie zum Strudelfall oder zum Wirbelfall gehört. Man kennt dafür zwei verschiedene Methoden, eine von *Poincaré* und eine von *Bendixson*. Die *Poincaré*sche beruht auf folgenden Gedanken. Wenn eine Schar geschlossener Integralkurven den Ursprung umschließen soll, so wird man die Gleichung derselben in der Form $F =$ konst. annehmen dürfen. Es liegt nahe, es hierbei einmal mit einer Funktion F zu versuchen, die sich nach Potenzen von x und y entwickeln läßt. Für F ergibt sich dann aus den Differentialgleichungen die Bedingung

$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Um F dieser Bedingung gemäß bestimmen zu können, denken wir uns die Entwicklung von F nach homogenen Polynomen der x, y geordnet:

$$F = F_1 + F_2 + \dots$$

Dabei ist also F_k ein homogenes Polynom k-ter Ordnung. Die Differentialgleichung dürfen wir nach S. 68 in der Form

$$\frac{dx}{dt} = -y + X_2 + \dots$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad x + Y_2 + \dots$$

annehmen. Daraus erkennt man sofort, daß $F_1 = 0$ sein muß. Ebenso leicht findet man $F_2 = x^2 + y^2$. Denn auf einen konstanten Faktor kommt es bei der Bestimmung von F nicht an. Und ferner hat man

die Bedingung, daß nach Ordnung von $\frac{dF}{dt}$ nach homogenen Polynomen alle diese einzelnen Polynome verschwinden müssen. Für das Polynom F_k findet man hiernach die Bedingung

$$y\frac{\partial F_k}{\partial x} - x\frac{\partial F_k}{\partial y} = G_k. \tag{11}$$

Dabei ist G_k ein Polynom k-ten Grades, das sich aus der Differentialgleichung und denjenigen F_i zusammensetzt, deren Ordnung niedriger als k ist. Zur weiteren Rechnung führt man am bequemsten Polarkoordinaten ein: $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$. Dann erkennt man leicht, daß für ein homogenes Polynom k-ten Grades gilt

$$G_k = \varrho^k \sum(p_n\cos n\vartheta + q_n\sin n\vartheta).$$

In der Fourierreihe kommen dabei nur solche Glieder vor, deren Nummer n dieselbe Parität hat wie k und k nicht übertrifft. Man sieht auch leicht ein, daß umgekehrt diese Bedingung dafür hinreichend ist, daß das ϱ^k-fache der Fourierreihe ein homogenes Polynom k-ten Grades ist. Setzt man dann $F_k = \varrho^k\varphi(\vartheta)$ und $G_k = \varrho^k\psi(\vartheta)$, so wird aus der Gleichung (11) die folgende:

$$-\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \psi(\vartheta).$$

Man kann ihr also dann und nur dann genügen, wenn das Absolutglied in der Fourierreihe für $\psi(\vartheta)$, d. i. also $p_0 = 0$ ist. Das ist für ungerades k offenbar von selbst erfüllt, da ja $\varrho^k\psi(\vartheta)$ ein homogenes Polynom sein soll. Für ungerades k ist dann $\varphi(\vartheta)$ eindeutig bestimmt, da doch auch in $\varphi(\vartheta)$ das Absolutglied Null sein muß. Bei geradem k indessen bedeutet Verschwinden von p_0 eine besondere Bedingung, und jetzt ist auch $\varphi(\vartheta)$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Ich behaupte nun, daß das Verschwinden der p_0 eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wirbels ist. Nehme ich nämlich an, diese Bedingung des Verschwindens der p_0 sei bis zur Nummer $k = 2n$ erfüllt, für $k = 2n$ selbst aber sei sie nicht mehr erfüllt, dann kann man eine Funktion $\varphi(\vartheta)$ aus

$$-\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \psi(\vartheta) - p_0$$

bestimmen. Das ist gleichbedeutend mit der Bestimmung eines zugehörigen homogenen Polynoms aus der Gleichung

$$y\frac{d\bar{F}_{2n}}{\partial x} - x\frac{d\bar{F}_{2n}}{\partial y} = G_{2n} - \gamma_0(x^2+y^2)^n.$$

Nun setze ich

$$F = x^2 + y^2 + F_2 + \ldots + \bar{F}_{2n}.$$

Dabei mögen die $F_2, \ldots F_{2n-1} \ldots$, aus den Gleichungen (11) bestimmt sein. Dann fallen in dem Ausdruck

$$\frac{dF}{dt}$$

alle Glieder von kleinerer als $2n$-ter Ordnung weg, während das Glied $2n$-ter Ordnung

$$-p_0(x^2+y^2)^n$$

wird. Daraus folgt, daß in genügender Nähe des Ursprungs $\frac{dF}{dt}$ von einerlei Vorzeichen ist. Ich will annehmen, es sei das negative. Dann folgt hieraus, daß auf einer dieser Umgebung des Ursprungs angehörigen Integralkurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ bei wachsendem Parameter t die Funktion F monoton abnimmt. Mit wachsendem t nähert sich also die Integralkurve immer mehr dem Ursprung. Sie mündet also entweder in denselben für $t \to \infty$ oder aber sie hat eine Kurve $F = c$ als Grenzzykel. Nun aber können in unserem Falle einer analytischen Differentialgleichung und einer analytischen Funktion F nur endlich viele Kurven $F = c$ Integralkurven sein. Denn aus $F = c$ findet man als Gleichung der Integralkurve $y = f(x, c)$, und dies hängt analytisch vom Parameter c ab. Wenn diese Funktion nun für unendlich viele sich gegen Null häufende Werte von c der Differentialgleichung genügte, so müßte dies nach allgemeinen Sätzen über analytische Funktionen für alle c so sein, während wir doch von einer Integralkurve ausgingen, auf der F sich monoton ändert, statt konstant zu sein. Somit gibt es in unserem Falle, wo ein $p_0 \neq 0$ ist, in einer gewissen Umgebung vom Ursprung keine geschlossenen Integralkurven. Daher müssen alle einer solchen Umgebung angehörigen Integralkurven im Ursprung münden. Daher ist für den Wirbelfall das Verschwinden aller p_0 eine notwendige Bedingung. Daß sie auch hinreicht, zeigt *Poincaré* durch den Nachweis, daß die für F so zu findende unendliche Reihe konvergiert. Doch will ich darauf nicht mehr eingehen.

Lieber will ich noch die Methode von *Bendixson* schildern. Dieser setzt von vornherein die Differentialgleichung in Polarkoordinaten an. Man kann sie dann, wie man leicht sieht, auf die Form

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \varrho c_1(\vartheta) + \varrho^2 c_2(\vartheta) + \ldots$$

bringen. Diejenige Lösung, welche für $\vartheta = 0$ den Wert ϱ_0 annimmt, hängt analytisch von ϱ_0 ab (S. 44). Sie läßt sich also für hinreichend kleine ϱ_0 in eine für alle $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ konvergente Reihe

$$\varrho(\vartheta, \varrho_0) = \varrho_0 u_1(\vartheta) + \varrho_0^2 u_2(\vartheta) + \ldots$$

entwickeln. Aus $\varrho(0, \varrho_0) = \varrho_0$ folgt $u_1(0) = 1$, $u_k(0) = 0\,(k = 2, 3 \ldots)$.

Trägt man diese Reihe in die Differentialgleichung ein, so erhält man für die u_k die folgenden Differentialgleichungen

$$\frac{du_1}{d\vartheta} = u_1 c_1(\vartheta)$$

$$\frac{du_2}{d\vartheta} = u_2 c_1(\vartheta) + u_1^2 c_2(\vartheta)$$

$$\frac{du_3}{d\vartheta} = u_3 c_1(\vartheta) + 2u_1 u_2 c_2(\vartheta) + u_1^3 c_3(\vartheta).$$

Die Lösungen sind durch die bei $\vartheta = 0$ vorgeschriebenen Werte völlig bestimmt. Für die Geschlossenheit der Lösungen ist hinreichend, daß die u_k periodische Funktionen der Periode 2π sind. Diese Bedingung ist aber auch notwendig. Denn wären etwa $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ periodisch, $u_{\nu+1}$ aber nicht periodisch, so sei z. B.

$$u_{\nu+1}(2\pi) - u_{\nu+1}(0) = d < 0.$$

Dann wird

$$\varrho(2\pi, \varrho_0) - \varrho(0, \varrho_0) = \varrho_0^{\nu+1}[d + \varrho_0(u_{\nu+1}(2\pi) - u_{\nu+1}(0) + \ldots].$$

Daher ist für hinreichend kleine ϱ_0

$$\varrho(2\pi, \varrho_0) - \varrho(0, \varrho_0) < 0.$$

Also wird

$$\varrho(0, \varrho_0) > \varrho(2\pi, \varrho_0) > \varrho(4\pi, \varrho_0) > \ldots$$

Daher wird $\vartheta = 0$ unendlich oft von jeder Lösung getroffen. Die Bedingung ist also auch notwendig.

Man muß sich aber vor Augen halten, daß die Tragweite dieser Betrachtungen begrenzt ist. Sie enthalten insbesondere bisher keine Rechenvorschrift, nach der man in einem konkreten Fall vorgehen kann. In dieser Richtung liegt nur eine Arbeit von *Dulac* (Bull. des sc. math. 32 (1908)) vor, der für die Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y + a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2}{x + a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2}$$

die Diskussion völlig durchgeführt hat. Hier genügen 8 der unendlich vielen Bedingungen, wie man bei direkter Ausführung der Integration sieht.

Ich will noch erwähnen, wie man im Sattelfall die vier reellen Lösungen durch den Ursprung wirklich finden kann. *Bendixson* hat zu diesem Zweck ein Verfahren der sukzessiven Approximationen ersonnen, das dem S. 66 besprochenen durchaus analog ist und das ich daher nicht mehr näher erörtern will.

Zum Schluß dieser Betrachtungen noch den Hinweis, daß in der Arbeit von *Bendixson* eine Methode entwickelt wird, die das Verhalten der Lösungskurven einer jeden Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{P}_1(x,y)}{\mathfrak{P}_2(x,y)}$$

in der Nähe des Ursprungs festzustellen erlaubt. Durch eine Kette bilinearer Transformationen wird eine jede solche Differentialgleichung auf die in diesem und dem vorigen Paragraphen ausführlich diskutierten Typen zurückgeführt.

Bemerkung: 1. In zwei neueren Arbeiten in der Math. Zeitschr. hat *Perron* den Gegenstand dieses Paragraphen erneut vorgenommen und in weitem Umfang die Bedingungen für $\delta(x, y)$ und $\varepsilon(x, y)$ angegeben, unter denen der Satz dieses Paragraphen richtig bleibt.

2. Die Übertragung der vorliegenden Ergebnisse auf Systeme hat bisher nur dürftige Ergebnisse gezeitigt. Sie beschränken sich wesentlich auf die durch gewisse Reihenentwicklungen gewonnene Erkenntnis, daß im Falle, wo ν der Wurzeln der charakteristischen Gleichung einen negativen Realteil haben, eine ν-parametrige Schar von Lösungen für $t \to \infty$ gegen den Ursprung konvergiert. Wenn z. B. alle diese Wurzeln positiv reell sind, so kann dies ganz analog wie S. 67 bewiesen werden. Ein dem allgemeinen Satz dieses Paragraphen entsprechender ist bisher nicht bekannt. Doch hat das Wenige, was bekannt ist, schon für Fragen der Mechanik wichtige Dienste getan. Vollständig kann man natürlich analog zu § 3 die Diskussion für Systeme linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten durchführen. Doch möchte ich diese Dinge, für die wir anläßlich der linearen Gleichungen zweiter Ordnung noch Proben bekommen werden, nicht mehr verfolgen.

§ 7. Über die Verteilung der singulären Stellen.

Man darf immer annehmen, daß durch eine vorgelegte Differentialgleichung einem jeden Punkt einer geschlossenen Fläche eine sie berührende Richtung zugeordnet sei und daß es sich also darum handelt, auf der geschlossenen Fläche Kurven zu finden, die jeden Punkt in der dort vorgeschriebenen Richtung passieren. Denn wenn zunächst eine der seither betrachteten Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ in einem Bereiche der x-y-Ebene eindeutig erklärt ist, so kann man ein Stück dieses Bereiches durch stereographische Projektion auf eine Kugeloberfläche projizieren und dann die in einem Stück dieser Fläche vorliegende Erklärung der Differentialgleichung über den Rest der Fläche so ergänzen, daß eine auf der geschlossenen Kugeloberfläche erklärte Differentialgleichung herauskommt. Dieser Gedanke gibt auch die Möglichkeit an die Hand, die bisher besprochenen Ergebnisse auf Differentialgleichungen der Form $f(x, y, y') = 0$ zu übertragen, wo etwa $f(x, y, y')$ ein Polynom sein möge. Dann ist das Problem, diese Gleichung zu untersuchen, nach *Poincaré* gleichwertig mit der Untersuchung der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{dy}{dt} = -z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y}$$

auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$ und somit haben wir wieder eine Differentialgleichung, die jedem Punkt einer geschlossenen Fläche in ein-

deutiger Weise eine sie berührende Richtung zuordnet. Tatsächlich definieren diese drei Differentialgleichungen Raumkurven, deren Projektion auf die x-y-Ebene $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = z$ liefert, so daß also diese Projektionen der Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ genügen. Tatsächlich liegen diese Raumkurven auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$, falls man ihre Anfangspunkte darauf wählt. Denn längs der Kurven ist $\frac{df}{dt} = 0$.

An diesen Ansatz können wir also anknüpfen, wenn wir jetzt noch einen allgemeinen Satz über die Verteilung der Singularitäten vornehmen wollen.

Nach *Poincaré* ordnen wir einer jeden isolierten singulären Stelle S einer Differentialgleichung einen Index j zu. Mit *Birkhoff* erklären wir ihn so: Man lege um die singuläre Stelle eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, welche aus endlich vielen, stetig differenzierbaren Bogen besteht und außer S keine andere singuläre Stelle umschließt. Durchläuft man dieselbe im positiven Sinn, so erfährt dabei das Linienelement der Differentialgleichung eine Drehung $2j \cdot \pi$. j heißt dann *Index der singulären Stelle.* Man erkennt ja auch sofort, daß die ganze Zahl j von der Wahl der umschließenden Kurve unabhängig ist. Denn bei stetiger Änderung derselben müßte sich auch j stetig ändern und bleibt daher als ganze Zahl unverändert. Diesen Index kann man durch die Zahl der Berührungen darstellen, welche die geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ mit den Lösungskurven der Differentialgleichung besitzt. Versteht man nämlich unter δ den Winkel, um den man im positiven Sinn die in den positiven Sinn von $\mathfrak{C}$ weisende Kurventangente drehen muß, um sie in das Linienelement der Differentialgleichung überzuführen und beachtet man, daß die Tangente selbst beim Umlauf sich um 2π dreht, so sieht man, daß $2j\pi = 2\pi$ + der Änderung von δ beim Umlauf ist. Falls nun aber eine Lösungskurve die geschlossene $\mathfrak{C}$ von außen berührt, so erfolgt ein Durchgang von δ durch ein Vielfaches von π im abnehmenden Sinn, bei einer Berührung von innen erfolgt ein Durchgang durch ein Vielfaches von π im wachsenden Sinn, während im Falle einer Außen-Innen-Berührung nur eine Erreichung eines Vielfachen von π, aber kein Durchgang stattfindet. Wir zählen also eine solche Berührung sowohl als eine Außen- als eine Innenberührung. Dann ist offenbar die Gesamtänderung von δ gleich $(J - A)\pi$, wo J die Zahl der Innenberührungen, A die Anzahl der Außenberührungen ist. Somit haben wir

$$j = \frac{J - A + 2}{2}.$$

Nach *Bendixson* kann man den Index einer singulären Stelle in Zusammenhang bringen mit der Zahl der die geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ passierenden, durch den singulären Punkt hindurchgehenden Lösungen λ,

und mit der Zahl der bei Durchlaufung von $\mathfrak{C}$ angetroffenen geschlossenen Knotengebiete $\varkappa$. Wir sagen dabei, ein Bogen von $\mathfrak{C}$ passiere ein offenes Knotengebiet, wenn alle Lösungen, die durch innere Punkte dieses Bogens bestimmt sind, in den singulären Punkt einmünden. Mit den Lösungen durch die Endpunkte eines Bogens ist dann das gleiche der Fall. Ein geschlossenes Knotengebiet liegt vor, wenn in einem Punkt eine Lösung die Kurve $\mathfrak{C}$ berührt und wenn sie von da aus nach beiden Seiten verfolgt in den singulären Punkt einmündet. Diese im singulären Punkt geschlossene Lösung grenzt daher ein Gebiet ab, in dem, wie man leicht auf Grund des S. 61 angegebenen Satzes einsieht, nur Lösungen gleicher Art verlaufen können. Jedem solchen geschlossenen Knotengebiet entspricht daher eine innere Berührung von $\mathfrak{C}$, während bei offenen Knotengebieten weder äußere noch innere Berührungen von $\mathfrak{C}$ zu verzeichnen sind. Endlich bleiben nun noch Bogen von $\mathfrak{C}$ übrig, durch deren Innenpunkte Lösungen hindurchgehen, auf welchen man zum zweiten Male diesen Bogen von $\mathfrak{C}$ trifft, wenn man sie in das Innere von $\mathfrak{C}$ verfolgt. Durch die Enden eines solchen Bogens gehen dann Lösungen, welche in den singulären Punkt einmünden. Wir wollen dann sagen, diese beiden Lösungen seien Verlängerungen voneinander oder auch sie bildeten eine durch den singulären Punkt hindurchgehende Lösung. Auf einem von den beiden Enden einer solchen Lösung bestimmten Bogen liegen nun, wie man leicht sieht, äußere und innere Berührungen, und zwar so, daß die Zahl der äußeren Berührungen die der inneren um Eins übertrifft. Der Leser möge die kleine hierzu führende gestaltliche Überlegung selbst anstellen, ausgehend von der Bemerkung, daß eine nahe beim einen Ende des Bogens beginnende Lösung nahe beim anderen Ende das Innere von $\mathfrak{C}$ wieder verläßt. Diese Lösung verfolge man nun in ihrer stetigen Abhängigkeit vom Anfangspunkt. Diese Überlegungen führen unter der Voraussetzung, daß jeder der drei Fälle in nur endlicher Anzahl auftritt, zu der Relation $\lambda - \varkappa = 2(j-1)$.

Wir betrachten nun eine geschlossene Fläche vom Geschlecht p, auf der eine Differentialgleichung mit eindeutigen stetigen und der *Lipschitz*-Bedingung genügenden Koeffizienten gegeben sei. Sie möge endlich viele singuläre Stellen aufweisen. Wir zerlegen dann durch irgendwelche *Jordan*sche Kurvenbogen mit stetig sich ändernder Tangente die geschlossene Fläche in endlich viele einfach zusammenhängende Gebiete, deren jedes an seinem Rand keine, in seinem Inneren nicht mehr als eine singuläre Stelle besitzen möge. Diese Einteilung der Oberfläche kann als ein Polyeder aufgefaßt werden, und so hat man nach dem *Euler*schen Polyedersatz zwischen der Anzahl e der Ecken, k der Kanten, und f der Flächenstücke die Beziehung

$$e + f - k = 2 - 2p.$$

Falls nun in einer Ecke ν Kanten zusammenstoßen, so gilt noch $\sum_1^e \nu_i = 2k$. Wir bestimmen nun für jedes der Gebiete den Index j. Dabei ist der Index derjenigen Gebiete, die keine singuläre Stelle enthalten, Null. Ferner heben sich die Anteile, welche Berührungen von Lösungen mit inneren Kantenpunkten zuzuschreiben sind, gegenseitig auf, wenn man die Summe aller Indizes bildet. Denn eine solche Berührung ist für das eine der angrenzenden Gebiete eine innere, für das andere eine äußere. Es bleiben also nur die Berührungen mit Lösungen in den Ecken der Gebiete. Geht aber eine Lösung durch eine Ecke, so passiert sie dort das Innere zweier Gebiete und berührt die $\nu - 2$ anderen von außen. Es sei denn, daß eine Lösung eine Ecke in einer Kantenrichtung passiert. Man darf aber immer die Einteilungslinien so wählen, daß dies nicht der Fall ist. Somit hat man in einer Ecke $\nu - 2$ äußere Berührungen. Bildet man nun die Summe der Indizes über alle Bereiche, so wird sie dieser Summe $-\sum \frac{\nu_i - 2}{2} + f$ gleich. Denn alle inneren und äußeren Berührungen heben sich einander auf, mit Ausnahme der in den Ecken stattfindenden Berührungen. Somit wird

$$\sum j = e + f - k = 2 - 2p.$$

§ 8. Singuläre Lösungen.

Schon gelegentlich der *Clairaut*schen Gleichung lernten wir auf S. 20 das eigentümliche Vorkommen von singulären Lösungen kennen. Wir machten damals auch die Erfahrung, daß durch einzelne Punkte zwei sich dort berührende Integralkurven gingen. Die singuläre Lösung trat als Enveloppe der die *Clairaut*sche Gleichung lösenden Geradenschar auf. Nun wollen wir von einer ganz anderen Seite an die singulären Lösungen herangehen.

Wir betrachten eine Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

$f(x, y, y')$ sei samt seinen drei partiellen Ableitungen erster Ordnung für alle in Betracht kommenden Linienelemente eindeutig und stetig. Die in Betracht zu ziehenden Linienelemente seien etwa: (x, y) aus einem Bereich B, y' beliebig.

Um die seither aufgestellten Sätze anwendbar zu machen, muß erst die Auflösung nach y' bewerkstelligt werden. Darüber gibt gewöhnlich der bekannte Satz über implizite Funktionen Aufschluß. Er lehrt folgendes: Wenn man ein Wertetripel x_0, y_0, y_0' hat, das der Gleichung (1) genügt, und wenn für dies Wertetripel die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x_0\, y_0\, y_0')$$

nicht auch verschwindet, so gibt es in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) eine einzige wohlbestimmte eindeutige stetige Funktion

$$y' = F(x, y),$$

die der Gleichung (1) genügt und die für $x = x_0$, $y = y_0$ den Wert $y' = y_0'$ annimmt. Im allgemeinen werden so zu jedem Wertepaar, d. h. zu jedem Punkt x_0, y_0 mehrere Werte y_0' und damit mehrere Funktionen $y' = F(x, y)$ gehören, die der Differentialgleichung genügen. Gewissermaßen wird das Feld der Linienelemente aus mehreren Schichten bestehen. Eine besondere Rolle müssen nach allem aber jedenfalls die Linienelemente spielen, welche auch noch der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

genügen. Alle diese Linienelemente werden von den Punkten derjenigen Kurve getragen, deren Gleichung sich durch Elimination von y' aus den beiden Gleichungen

$$f(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

ergibt. Wir nennen diese Kurve die *Diskriminantenkurve*. Denn ihre Punkte liefern diejenigen Wertepaare x, y, zu welchen zusammenfallende Wurzeln y' der Gleichung

$$f(x, y, y') = 0$$

gehören. Die Linienelemente, die den beiden Gleichungen (3) genügen, heißen *singuläre Linienelemente*.

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung

$$y'^2 = x.$$

Ihre singulären Linienelemente genügen den beiden Gleichungen

$$y'^2 = x$$
$$2y' = 0.$$

Sie sind alle der x-Achse parallel und liegen auf der Kurve $x = 0$. Man stellt weiter leicht den Verlauf der Integralkurven fest. Nur für positive x sind reelle Integralkurven vorhanden. Dieselben besitzen in den Punkten der Diskriminantenkurve Spitzen.

Die Lösungen sind $y = \pm \frac{2}{3} x^{3/2} + c$. Den beiden Schichten $y' = +\sqrt{x}$ und $y' = -\sqrt{x}$ entsprechend gehen durch jeden Punkt mit positiver Abszisse zwei Integralkurven hindurch.

Ich betrachte weiter die Gleichung

$$y'^2 = y.$$

Hier genügen die singulären Linienelemente den beiden Gleichungen

$$y'^2 = y$$
$$2y' = 0.$$

Sie sind also wieder der x-Achse parallel und liegen auf der Kurve $y = 0$. Diese Kurve ist daher selbst Lösung und die übrigen Integralkurven $y = \frac{(x+c)^2}{4}$ berühren dieselbe. Wir sagen in diesem Fall, die Diskriminantenkurve sei singuläre Lösung. *Wir verstehen also unter einer singulären Lösung eine aus lauter singulären Linienelementen aufgebaute Lösung.* Nach der Definition der Diskriminantenkurve kann eine singuläre Lösung also nur aus einzelnen Bogen der Diskriminantenkurve bestehen. Denn diese ist der Ort der Punkte, welche singuläre Linienelemente tragen. Aber das erste Beispiel lehrt zugleich, daß die Diskriminantenkurve ganz und gar nicht immer eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Damit dies einmal der Fall ist, müssen vielmehr noch besondere Zusatzbedingungen bestehen. Diese wollen wir jetzt herleiten. Wir müssen ja nur feststellen, unter welchen Umständen die Richtung der Diskriminantenkurve mit der in ihren Punkten vorgeschriebenen singulären Feldrichtung übereinstimmt. Wenn dies längs eines Bogens derselben der Fall ist, so ist dieser Bogen singuläre Lösung. Um aber die Richtung der Diskriminantenkurve zu bestimmen, hat man nur ihre Gleichung (3) zu differenzieren. Das liefert aber

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0 .$$

Da aber längs der Diskriminantenkurve

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

ist, so erhält man die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 .$$

Soll daher das $\frac{dy}{dx}$ der Diskriminantenkurve mit dem y' des Feldes übereinstimmen, so muß

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

sein. Daher erhält man zur Bestimmung der singulären Lösungen die drei Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x, y, y') = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') \cdot y' = 0 . \end{cases}$$

Wenn umgekehrt eine Kurve den sich durch Elimination des Parameters λ aus den drei Gleichungen

$$f(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \lambda) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) \cdot \lambda = 0$$

ergebenden beiden Bedingungen genügt, so ist sie eine singuläre Lösung der Differentialgleichung, falls nicht auch noch für alle ihre Punkte

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0$$

ist. Denn wenn man zur Bestimmung der Richtung die erste der drei Gleichungen differenziert, so erhält man unter Berücksichtigung der zweiten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0 .$$

Daher ist nach der dritten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y' - \lambda) = 0 .$$

Hieraus ergibt sich wegen der auf $\frac{\partial f}{\partial y}$ bezüglichen Bedingung

$$y' = \lambda ,$$

so daß also für das y' der Kurve $f(x, y, y') = 0$ gilt. Sie ist also eine Lösung, und zwar eine singuläre, wegen des Bestehens der zweiten der drei Gleichungen. Die drei Gleichungen (4) zusammen mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') \neq 0$ legen also die singulären Lösungen fest.

Man sieht aus den vielen für eine singuläre Lösung notwendigen Bedingungen, daß *im allgemeinen* die Diskriminantenkurve *nicht* singuläre Lösung sein wird. Sie wird vielmehr im allgemeinen Ort der Spitzen der Integralkurven sein (vgl. das erste Beispiel). Übrigens kann sehr wohl auch die Diskriminantenkurve Lösung sein, ohne aus singulären Linienelementen zu bestehen. Sie kann mit anderen Worten auch nichtsinguläre Lösung sein. So ist es z. B. bei

$$(y'^2 - x + y)(y' - 1) = 0 .$$

Für die singulären Elemente muß noch

$$2y'(y' - 1) + y'^2 - x + y = 0$$

sein. Elimination von y' liefert als Diskriminantenkurve

$$(x - y)(y - x + 1)^2 = 0 .$$

Auf $x = y$ sind $y' = 0$ die singulären Richtungen. Auf $y = x - 1$ sind $y' = 1$ die singulären Richtungen, $y = x$ ist aber Lösung, ohne singuläre Lösung zu sein. Das kommt also dadurch zustande, daß ein anderer Zweig, der durch $f(x, y, y') = 0$ definierten Funktion $y' = F(x, y)$ längs der Diskriminantenkurve deren Richtungen liefert.

Nach diesen Darlegungen is es klar, daß eine jede Enveloppe einer Schar von Integralkurven, d. h. eine jede Kurve, die in jedem ihrer Punkte von einer Integralkurve berührt wird, eine singuläre Lösung ist, im Sinne der vorhin aufgestellten Definition. Denn da durch jedes ihrer Linienelemente zwei verschiedene Integralkurven gehen, muß der vorhin erwähnte Satz über implizite Funktionen in seiner Anwendung auf die Linienelemente der Enveloppe versagen[1]). Solche Linienelemente nannten wir aber singulär. Die Enveloppe besteht also nur aus singulären Elementen.

Man darf aber nicht umgekehrt schließen wollen, daß alle singulären Lösungen als Enveloppen einer Schar von Integralkurven aufgefaßt werden können. Es ist also nicht immer der Fall, daß die singuläre Lösung in ihren Punkten von anderen Integralkurven berührt wird.

Einige Beispiele sollen die Verhältnisse klarstellen. Man kann schon bei der *Clairaut*schen Gleichung beginnen. Ich betrachte die Tangenten der kubischen Parabel

$$y = x^3.$$

Sie genügen der *Clairaut*schen Gleichung

$$27(y - y'x)^2 = 4y'^3. \tag{5}$$

Wenn man die singulären Integrale derselben sucht, so hat man noch die beiden Gleichungen

$$54(y - y'x)x + 12y'^2 = 0 \tag{6}$$

$$-54(y - y'x)y' + y'54(y - y'x) = 0 \tag{7}$$

aufzustellen. Da (7) identisch erfüllt ist, so hat man zur Auffindung der singulären Lösungen nur y' aus (5) und (6) zu eliminieren. Das führt auf

$$108 \cdot 4y'^3x^2 - 144y'^4 = 0.$$

Daher ist entweder

$$y' = 0$$

oder

$$y' = 3x^2.$$

Die erste Möglichkeit führt zu der singulären Lösung

$$y = 0,$$

die zweite zur Leitparabel

$$y = x^3.$$

---

[1]) Es sollen nur solche Linienelemente betrachtet werden, für die $\frac{\partial f}{\partial y'}$ existiert. Ebenso mag die Möglichkeit beiseite bleiben, daß man zwar in der Umgebung des betreffenden Linienelementes die Gleichung $f(x, y, y') = 0$ nach y' auflösen kann, daß aber für die aufgelöste Gleichung $y' = f(x, y)$ die *Lipschitz*bedingung nicht erfüllt ist. Auch so könnte es ja kommen, daß mehrere Lösungen durch das Linienelement gehen.

Während diese als Enveloppe der die *Clairaut*sche Gleichung befriedigenden Geradenschar aufzufassen ist, gibt es keinerlei Integralkurven, die die Gerade $y = 0$ in ihren einzelnen Punkten berührten. Sie ist keine Enveloppe. Trotzdem besteht sie aus singulären Linienelementen. Diese Erscheinung tritt stets bei den Wendetangenten der Leitkurve einer *Clairaut*schen Differentialgleichung auf.

Wenn nämlich

$$\eta = f(\xi)$$

die Gleichung der Leitkurve ist, so sind

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

die Gleichungen ihrer Tangenten. S. 13 haben wir gelernt, wie man die Differentialgleichung einer solchen Kurvenschar bestimmt. Sie ergibt sich durch Elimination von ξ aus den beiden Gleichungen

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$
$$y' = f'(\xi).$$

Zur Bestimmung der singulären Lösungen dieser *Clairaut*schen Gleichung hat man zu beachten, daß $f'(\xi)$ eine eindeutige Funktion ist, daß sich also die eventuellen Doppelwurzeln bei Auflösung der ersten Gleichung nach ξ ergeben müssen. Daher findet man die Bedingungen für die singulären Lösungen, wenn man die ξ-Ableitung dieser ersten Gleichung Null setzt. Das liefert aber

$$f''(\xi)(x - \xi) = 0.$$

Also

$$x - \xi = 0$$

und

$$f''(\xi) = 0.$$

Der erste Fall liefert die Leitkurve. Der zweite Fall führt zu den Wendetangenten, da ja die Wendepunkte durch $f''(\xi) = 0$ charakterisiert sind. (Zu den Wendetangenten zählen wir also alle Tangenten, die in höherer als der ersten Ordnung die Kurve berühren.)

Warum gerade diese Wendetangenten mit zu den singulären Lösungen, also auch mit zu der Diskriminantenkurve gehören, läßt sich am vorigen Beispiel der Gleichung

$$27(y - y'x)^2 = 4y'^3$$

leicht erläutern, wenn man beachtet, daß von den Punkten des in Fig. 8 schraffierten Gebietes drei Tangenten an die Parabel gehen, von den Punkten des nicht schraffierten Gebietes aber nur eine. Beide Gebiete werden naturgemäß durch die Diskriminantenkurve getrennt. Denn das ist deren geometrische Bedeutung.

Ich betrachte noch ein zweites Beispiel, in dem die singulären Lösungen nicht als Enveloppen auftreten. Das ist der Fall bei der Differentialgleichung

$$y'^2 = y^3.$$

Ihre Lösungen sind

$$y = \frac{4}{(x+c)^2}.$$

Dazu kommt noch die singuläre Lösung

$$y = 0.$$

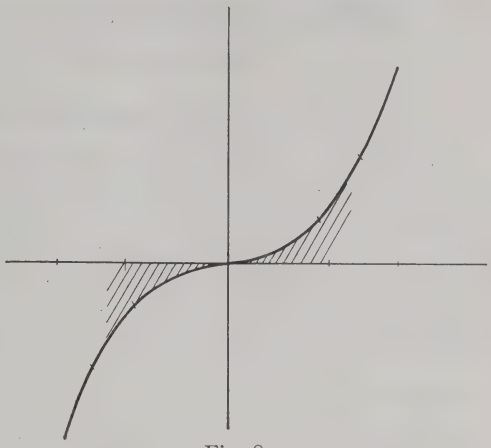

Fig. 8.

Sie wird von keiner anderen Integralkurve im Endlichen berührt, tritt vielmehr als gemeinsame Asymptote aller Integralkurven auf, die sich ihr beliebig nahe anschmiegen. Diese gehen nämlich auseinander durch Parallelverschiebung in Richtung der x-Achse hervor. Wenn daher eine der Kurven, z. B. $y = \frac{4}{x^2}$ (Fig. 9),

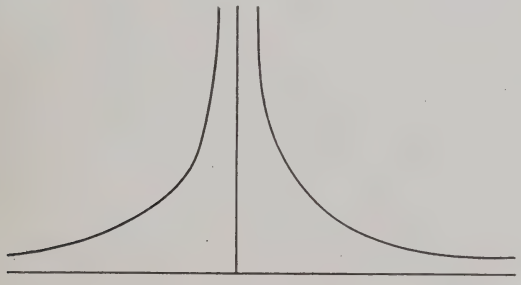

Fig. 9.

für $x > 20$ nur um $\frac{1}{100}$ höchstens von $y = 0$ abweicht, so kann ich sie so parallel verschieben, daß eine Kurve entsteht, die schon für $x > x_0$ nur noch um $\frac{1}{100}$ von $y = 0$ abweicht. x_0 kann dabei ganz beliebig gewählt werden. Denn

$$y = \frac{4}{(x+20-x_0)^2}$$

ist die gewünschte Kurve.

4. Kapitel.

Differentialgleichungen erster Ordnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Feste und bewegliche Singularitäten.

Für z-Werte, welche einem abgeschlossenen Bereiche B der komplexen z-Ebene, und für w-Werte, welche einem abgeschlossenen Bereiche G der komplexen w-Ebene angehören, sei $f(z, w)$ eine eindeutige, bis auf gewisse Singularitäten reguläre analytische Funktion. Uns wird hier insbesondere allein der Fall beschäftigen, daß $f(z, w)$ in dem Bereiche durchweg von rationalem Charakter ist. Dann wollen wir $f(z, w)$ als Quotient zweier in dem Bereiche regulärer Funktionen annehmen. Es sei also $f(z, w) = \frac{f_1(z, w)}{f_2(z, w)}$, wo $f_1(z, w)$ und $f_2(z, w)$ im zugrunde gelegten Bereiche regulär sind. Dann stellen wir uns die Aufgabe, die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{f_1(z, w)}{f_2(z, w)} \tag{1}$$

in diesem Bereiche zu untersuchen. Solche Lösungen sind durch ihre Anfangsbedingungen bestimmt, und wir wissen von S. 41 her folgendes: Wenn die Anfangswerte z_0, w_0 so gewählt sind, daß $f(z, w)$ an dieser Stelle regulär ist, daß also mit anderen Worten daselbst der Nenner nicht verschwindet, dann gibt es genau eine in der Umgebung von z_0 eindeutige reguläre Funktion $w(z)$, für die $w(z_0) = w_0$ gilt, und die der Differentialgleichung genügt. Wir wissen weiter, daß es auch keine andere nichtanalytische dieser Bedingung genügende Lösung gibt, ja man kann der Fusnote [1]) von S. 28 sogar entnehmen, daß es keine weitere der Bedingung $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ genügende Lösung gibt.

Die weitere Aufgabe ist es nun, mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden eine solche durch ihre Anfangsbedingungen festgelegte Lösung durch analytische Fortsetzung in ihrem weiteren Verlauf zu verfolgen. Wo sind z. B. die Singularitäten einer solchen Lösung zu suchen? Ich nehme an, bei Fortsetzung längs eines bestimmten Weges könne man bis an eine Stelle z_0 aus B heran, nicht aber über dieselbe hinaus gelangen. Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder konvergiert bei Annäherung an die Stelle z_0 die Funktion $w(z)$ einem bestimmten Grenzwert zu oder nicht. Ich betrachte erst den zweitgenannten Fall. Es wird sich zeigen, daß er nur dann eintritt, wenn $f_2(z_0, w) = 0$ ist für alle w. Da nämlich der Nenner $f_2(z, w)$ im Bereiche G regulär ist, so gibt es in G nur endlich viele Stellen w_i für die $f_2(z_0, w_i) = 0$

ist, falls nicht $f_2(z_0, w) \equiv 0$ ist. Man umgebe sie und auch $w = \infty$ durch Kreise, über deren Kleinheit noch zu verfügen sein wird. Dann kann man eine von der Kleinheit der Kreise abhängende Zahl ϱ so bestimmen, daß für $|z - z_0| \leqq \varrho$ die Wurzeln w von $f_2(z, w) = 0$ alle im Innern dieser Kreise liegen. Dann gibt es eine Zahl M derart, daß für $|z - z_0| \leqq \varrho$ und für ein jedes nicht diesen Kreisen angehörige w stets $|f_2(z, w)| > M$ gilt. Wählt man nun die Kreise genügend klein, so muß es beliebig nahe bei z_0 auf dem der Fortsetzung zugrunde gelegten Wege Stellen geben, wo die Werte der Lösung außerhalb oder auf der Peripherie jener Kreise liegen. Denn sonst müßte gegen die Annahme $w(z)$ für $z \to z_0$ gegen einen Grenzwert konvergieren. Da aber zu jeder dieser Stellen somit ein endlicher Konvergenzkreis gehört, dessen Radius stetig vom Entwicklungsmittelpunkt abhängt, so können bei Annäherung an z_0 die Konvergenzradien nicht gegen Null streben. Somit ist tatsächlich nur der erste der beiden aufgezählten Fälle wirklich möglich. Wenn also die Fortsetzung über z_0 hinaus nicht möglich ist, ohne daß $f_2(z_0, w) = 0$ für alle w, so muß $w(z)$ einem bestimmten Grenzwert w_0 zustreben. Die Betrachtung lehrt dann außerdem, daß $f_2(z_0, w_0) = 0$ ist. Somit haben wir drei Fälle zu unterscheiden.

Entweder ist $f_2(z_0, w) = 0$ in der Umgebung von w_0 für kein anderes w erfüllt, oder aber es ist $f_2(z_0, w)$ für alle w Null. Beide Male sei $f_1(z_0, w_0) \neq 0$. Im *ersten* Falle also, wo zwar $f_2(z_0, w_0) = 0$ ist, aber $f_2(z_0, w) \neq 0$ für $w \neq w_0$ in der Umgebung von w_0, sprechen wir von einer *beweglichen* Singularität. Denn der Grenzwert w_0, mit dem wir in z_0 ankommen, hängt offenbar von den Anfangswerten der untersuchten Lösung ab. Es erweist sich dann also bei der Fortsetzung längs desselben Weges eine andere Lösung unter Umständen in z_0 als nicht singulär, falls sie nämlich für $z \to z_0$ einen von w_0 verschiedenen Grenzwert hat. Im *zweiten* Falle aber, wo $f_2(z_0, w) = 0$ ist für alle w, liegt eine *feste* Singularität vor. Denn nun ist jede Lösung bei Annäherung an z_0 in der gleichen Lage. Der *dritte* noch zu unterscheidende Fall ist der, daß außer $f_2(z_0, w_0) = 0$ auch $f_1(z_0, w_0) = 0$ ist. Dies soll also in den beiden ersteren Fällen nicht so sein.

Der *erste* der eben aufgezählten Fälle ist sehr leicht zu erledigen. In diesem Falle nämlich, wo zwar $f_2(z_0, w_0) = 0$ ist, in der Umgebung von w_0 aber $f_2(z_0, w)$ nicht weiter verschwindet, ist offenbar in der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{f_2(z, w)}{f_1(z, w)} \tag{2}$$

die rechte Seite in der Umgebung von z_0, w_0 regulär. Die rechte Seite verschwindet zwar für z_0, w_0, aber sie verschwindet nicht für z_0 und beliebiges w. Daher kommen in der Entwicklung der rechten

Seite Glieder vor, die von $z - z_0$ unabhängig sind. Das niedrigste derselben sei vom Grade m. Dann läßt sich diejenige Lösung, welche für $w = w_0$ den Wert z_0 besitzt, in eine Potenzreihe dieser Form entwickeln:

$$z = z_0 + c_1 (w - w_0)^{m+1} + \dots .$$

Die Umkehrung derselben lehrt, daß w in der Umgebung von z_0 nach Potenzen von $(z - z_0)^{\frac{1}{m+1}}$ entwickelt werden kann. Es liegt also für die Lösung ein $m+1$-*blättriger algebraischer Verzweigungspunkt* vor. Die Lage desselben hängt aber von den Anfangswerten ab. Denn verlangen wir diejenige Lösung, welche für $w = w_1$ den Wert z_0 annimmt, so finden wir für dieselbe eine Reihe

$$z = z_0 + \alpha_1 (w - w_1) + \dots ,$$

in der jetzt der Koeffizient α_1 der ersten Potenz nicht verschwindet, falls nur w_1 hinreichend nahe bei w_0 liegt, nämlich so nahe, daß $f_2(z_0, w_1) \neq 0$ ist. Dann wird aber

$$w = w_1 + \frac{1}{\alpha_1}(z - z_0) + \dots$$

in der Umgebung von z_0 regulär und das lehrt, daß die Verzweigungsstelle tatsächlich verschiebbar ist.

Im *zweiten* der drei Fälle, wo $f(z_0, w) = 0$ ist für alle w, würde die gleiche Überlegung nur zu der Lösung $z = z_0$ führen, mit der wir für unseren Zweck weiter nichts anfangen können. Bei Annäherung an eine derartige Singularität zweiter Art kann nun tatsächlich die Lösung $w(z)$ unbestimmt werden. So ist ja z. B. die allgemeine Lösung von

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w}{z^2}$$

die Funktion $w = Ce^{-\frac{1}{z}}$. Das wird bei Annäherung an 0 längs der imaginären Achse tatsächlich unbestimmt.

Eine große Menge von Untersuchungen befaßt sich damit, bei gegebener Differentialgleichung die Natur der Lösungen in der Nähe einer solchen festen singulären Stelle z_0 zu untersuchen. *Briot* und *Bouquet* haben die Untersuchungen begonnen, *Picard, Poincaré, Dulac, Bendixson, Horn* und neuerdings *Malmquist* haben sie gefördert. Ich verweise wegen allem Weiteren auf eine Arbeit von *Malmquist* im Arkiv för matematik astronomi och fysik, Bd. 15, wo auch die Literatur erwähnt ist. Hier sei nur so viel gesagt: Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet immer ein Zweig der Lösung, welcher einem bestimmten Grenzwert w_0 zustrebt, wenn sich z auf einem passenden Wege der singulären Stelle nähert. Dieser Wert w_0 erfüllt aber dann immer mit z_0 zusammen die Gleichung $f_1(z_0, w_0) = 0$. Dies folgt sofort aus der schon mehrfach angestellten Überlegung,

welche an (2) anknüpft. Diese Gleichung wäre ja dann in der Umgebung von z_0, w_0 regulär. Aber ihre einzige Lösung, welche für $w \to w_0$ gegen z_0 strebt, ist $z = z_0$, das aber nicht Umkehrung der jetzt zu betrachtenden Lösung sein kann. Somit bekommt man Anschluß an die singulären Stellen der *dritten* Art, welche wir im reellen Gebiet schon ausführlich untersucht haben. Wir haben bei diesen Betrachtungen endliche z_0 und w_0 angenommen. Aber man weiß, wie man durch die Substitutionen $\frac{1}{z} = \mathfrak{z}$ oder $\frac{1}{w} = \mathfrak{w}$ dem Unendlichfernen beikommt. Wir werden die Untersuchung der Umgebung dieser singulären Stellen in diesem Buche nicht weiter verfolgen, uns nur in einem späteren Paragraphen noch mit der Bestimmung derjenigen Lösungen befassen, welche in einer solchen singulären Stelle algebraisches Verhalten besitzen.

In diesem Paragraphen möchte ich nur noch die Frage behandeln, *für welche Differentialgleichungen nun nur feste Verzweigungspunkte vorhanden sind.* Wir beschränken uns dabei von vornherein auf Differentialgleichungen (1), in welchen die rechte Seite rational ist. Zähler und Nenner sollen also ganze rationale Funktionen sein. Die festen singulären Stellen sind diejenigen Stellen z_0, für welche der Nenner für alle w verschwindet. Dazu diejenigen z-Werte, für welche Zähler und Nenner für passende w-Werte gleichzeitig verschwinden. Dazu kommt eventuell noch der unendlich ferne Punkt, wenn der Übergang zu $z = \frac{1}{\mathfrak{z}}$ die Stelle $\mathfrak{z} = 0$ zu den festen Singularitäten überführt. Die Substitution $z = \frac{1}{\mathfrak{z}}$ aber führt die Differentialgleichung (1) in

$$\frac{dw}{d\mathfrak{z}} = -\frac{f_1\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}, w\right)}{f_2\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}, w\right)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{z}^2} \tag{3}$$

über. Und hier kann man alle gewünschten Feststellungen leicht machen. Außerhalb dieser festen Singularitäten besitzt also ein jedes Integral nach unseren Überlegungen allenfalls noch Pole und algebraische Verzweigungen.

Soll nun also eine Differentialgleichung (1) der angegebenen Art nur feste Verzweigungspunkte besitzen, so muß der Nenner der rechten Seite für jedes z_0, für das er überhaupt verschwindet, unabhängig von w verschwinden. Daher kommt im Nenner das w gar nicht vor. Die Differentialgleichung muß daher von der Form

$$\frac{dw}{dz} = \varphi(z, w)$$

sein, wo $\varphi(z, w)$ ein Polynom in w ist. Damit sind bewegliche algebraische Verzweigungspunkte ausgeschlossen, in welchen w endlich

bleibt. Nun müssen noch diejenigen ausgeschlossen werden, in welchen w unendlich wird. Daher mache ich die Substitution $w = \frac{1}{\mathfrak{w}}$. Damit geht die Differentialgleichung (1) in

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dz} = -\mathfrak{w}^2 \varphi\left(z, \frac{1}{\mathfrak{w}}\right) \tag{4}$$

über. Nun muß wieder der Nenner von $\mathfrak{w}$ unabhängig sein (nachdem man etwaige gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner entfernt hat). Daher kann $\varphi(z, w)$ in w höchstens vom zweiten Grade sein. Damit haben wir den Satz:

Die einzigen rationalen Differentialgleichungen mit nur festen Verzweigungspunkten sind die vom Riccatischen Typus:

$$\frac{dw}{dz} = A_0(z) + A_1(z)w + A_2(z)w^2. \tag{5}$$

Bemerkung. Auch für die allgemeineren Differentialgleichungen

$$f(x, y, y') = 0,$$

wo $f(x, y, y')$ ein Polynom in x, y, y' ist, wurde durch *Fuchs* und *Poincaré* das Problem gelöst, alle Differentialgleichungen mit nur festen Verzweigungspunkten zu bestimmen. Das Ergebnis ist dieses: Das allgemeine Integral ist entweder eine algebraische Funktion, oder aber man kann die Differentialgleichung durch eine algebraische Substitution entweder auf eine *Riccati*sche oder auf die Differentialgleichung

$$y' = g(x)\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

transformieren.

Aus unseren bisherigen Ergebnissen ergibt sich leicht ein dem *Picard*schen Satz für ganze transzendente Funktionen entsprechender Satz für die Lösungen unserer Differentialgleichungen. Er lautet: *In der Differentialgleichung*

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w)$$

sei die rechte Seite eine rationale Funktion. $w(z)$ sei ein Integral derselben, welches eine unendlich vieldeutige Umkehrungsfunktion $z(w)$ besitzt. Dann gibt es nur endlich viele Ausnahmewerte W, für welche die Gleichung $w(z) = W$ nur endlich viele Lösungen besitzt.

Zum Beweise betrachtet man die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f(z, w)},$$

welcher die Umkehrungsfunktion unseres Integrals genügt. Feste Singularitäten und Singularitäten dritter Art derselben sind nur in endlicher Zahl vorhanden. Wir betrachten eine Stelle W, welche nicht zu diesen festen Singularitäten gehört. An dieser Stelle nimmt die Funktion $z(w)$ Werte an, unter denen, wie ich zeigen will, unendlich viele verschiedene vorkommen. Es ist nämlich jeder Zweig unserer Funktion an der Stelle W von algebraischem Charakter. Ein jeder

Zweig aber ist durch seinen bei W angenommenen Wert festgelegt. Da aber die Funktion nach Voraussetzung unendlich vieldeutig ist, und da jeder ihrer Zweige auf jedem, die angegebenen Singularitäten vermeidenden Weg bis nach W fortgesetzt werden kann, nimmt die Funktion $z(w)$ an der Stelle W unendlich viele verschiedene Werte an. Darin liegt der Beweis unseres Satzes.

Dieser Satz legt die Frage nach den endlich vieldeutigen Integralen der Differentialgleichung (1) nahe. Derartigen Fragen wenden wir uns nun zu.

§ 2. Differentialgleichungen mit eindeutigen Integralen.

Im vorigen Paragraphen wurde schon bewiesen, daß die einzigen rationalen Differentialgleichungen ohne verschiebbare algebraische Verzweigungen die *Riccati*schen sind. Daher sind jedenfalls auch die Differentialgleichungen, welche *nur* eindeutige Integrale besitzen, bei welchen also überhaupt keine, also auch keine verschiebbaren Verzweigungen vorkommen, unter den *Riccati*schen zu suchen. Die Bedingungen dafür, daß eine *Riccati*sche Gleichung nur eindeutige Integrale besitzt, sind noch unbekannt. Für andere Differentialgleichungen hat aber *Malmquist* den folgenden schönen Satz bewiesen (Acta mathematica Bd. 36):

Wenn die rationale Differentialgleichung $\frac{dw}{dz} = f(z, w)$ *keine Riccatische ist, so ist jedes eindeutige Integral derselben eine rationale Funktion.*

Zum Beweis sind zwei von *Boutroux* herrührende Hilfssätze über das Wachstum der Integrale rationaler Differentialgleichungen bei Annäherung an singuläre Stellen notwendig. Ich verweise wegen des Beweises derselben auf die Darstellung von *Malmquist*.

Hilfssatz I: In der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = c_0 + c_1 w + \ldots + c_n w^n \quad (n > 1)$$

seien die c_i rationale Funktionen von z. $f(z)$ sei ein Integral dieser Gleichung, welches außerhalb eines gewissen Kreises $|z| > r$ außer bei $z = \infty$ keine Singularität besitzt. Dann gibt es eine Zahl μ und eine Zahl R, so daß für $|z| > R$ stets $|f(z)| < |z|^{\mu}$ gilt.

Hilfssatz II: In der rationalen Differentialgleichung $\frac{dw}{dz} = \frac{f_1(z, w)}{f_2(z, w)}$ habe der Zähler in w den Grad n_1, der Nenner in w den Grad n_2, und es sei $n_1 = n_2 + 2$. $w(z)$ sei eine Lösung dieser Gleichung, welche für $|z| > r$ keine anderen Singularitäten als $z = \infty$ besitzt. $w_i(z)$ genüge der Gleichung $f_2(z, w) = 0$. $w(z)$ habe in $|z| > r$ keine andere Singu-

larität als $z = \infty$; es sei für endliche z aus $|z| > r$ nie $w(z) = w_i(z)$. Dann gibt es zwei Zahlen τ_i und R, so daß

$$\frac{1}{|w - w_i|} < |z|^{\tau_i} \text{ für } |z| > R.$$

Auf Grund dieser Hilfssätze kann nun der Satz von *Malmquist* recht einfach bewiesen werden. Es sei nämlich $w(z)$ eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung. Mit Ausnahme der festen Singularitäten der Differentialgleichung besitzt also diese Funktion keine anderen Singularitäten als Pole. Trägt man nun diese Funktion in den Nenner ein, so wird $\frac{1}{f_2(z, w(z))}$ eine eindeutige Funktion von z, die nur noch an den festen Singularitäten und den Singularitäten dritter Art der Differentialgleichung singulär sein kann. An den Polen von $w(z)$ ist dies ohne weiteres klar. An den regulären Stellen von $w(z)$ kann aber $f_2(z, w)$ nicht verschwinden. Denn sonst wäre daselbst $\frac{dz}{dw} = 0$. Der Zähler kann nämlich nicht gleichzeitig verschwinden, weil dies nur an den Singularitäten dritter Art der Differentialgleichung passieren kann. Betrachten wir also nun das Verhalten von $\frac{1}{f_2(z, w(z))}$ an einer singulären Stelle zweiter oder dritter Art z_0 der Differentialgleichung etwas näher. Man kann dort $\frac{1}{f_2}$ in eine *Laurent*-Reihe entwickeln

$$\frac{1}{f_2(z, w)} = G\left(\frac{1}{z - z_0}\right) + \mathfrak{P}(z - z_0).$$

Hier ist bekanntlich $G(\zeta)$ eine ganze Funktion. Wendet man nun den zweiten Hilfssatz auf die verschiedenen Linearfaktoren des Nenners f_2 an, so schließt man leicht, daß es eine Zahl ϱ gibt, derart, daß

$$\left|\frac{1}{f_2(z, w(z))}\right| < |z - z_0|^{\varrho}$$

ist in einer gewissen Umgebung von z_0. Daraus folgt wieder, daß für jede positive Zahl ε in einer gewissen Umgebung von z_0 die Abschätzung gilt

$$\left|G\left(\frac{1}{z - z_0}\right)\right| < |z - z_0|^{\varrho - \varepsilon}.$$

Daher gilt für die ganze Funktion $G(\zeta)$ für genügend große ζ die Ungleichung

$$|G(\zeta)| < \zeta^{-\varrho + \varepsilon}.$$

Daher ist $G(\zeta)$ ein Polynom. Daher hat also $\frac{1}{f_2(z, w(z))}$ keine anderen Singularitäten als Pole. Und daher ist es eine rationale Funktion $\varphi(z)$. Da demnach $w(z)$ der algebraischen Gleichung

$$\frac{1}{f_2(z, w)} = \varphi(z)$$

genügt, ist $w(z)$ eine algebraische Funktion. Da sie aber eindeutig sein sollte, so ist $w(z)$ rational, wie bewiesen werden sollte.

Malmquist hat in der gleichen Arbeit einen analogen Satz über rationale Differentialgleichungen mit endlich vieldeutigen Integralen bewiesen. Er ist auch damit über den Inhalt der Vermutungen und Beweisversuche *Painlevés*, dem man die Fragestellung verdankt, weit hinausgegangen. Dieser weitergehende Satz lautet:

Wenn eine rationale Differentialgleichung $\frac{dw}{dz} = f(z, w)$ *ein endlich vieldeutiges Integral besitzt, so ist dasselbe entweder eine algebraische Funktion, oder aber man kann die Differentialgleichung durch eine Substitution der Form*

$$\mathfrak{w} = \frac{w^n + \alpha_2 w^{n-2} + \ldots + \alpha_n}{w^{n-1} + \beta_2 w^{n-2} + \ldots + \beta_n}$$

in die Riccatische Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dz} = a_0 + a_1 \mathfrak{w} + a_2 \mathfrak{w}^2$$

überführen. In dieser sowohl wie in der Substitution sind dabei alle Koeffizienten rationale Funktionen von z.

Wegen des etwas langwierigen Beweises dieses Satzes sei auf die Originalarbeit von *Malmquist* verwiesen.

Bemerkung: Von *Hermite* rührt der folgende Satz her, den er in seinem Cours d'analyse angibt und für den auch in *Picard*s Traité d'analyse ein Beweis zu finden ist (Bd. 3, S. 62). *Wenn* $f(z_1, z_2)$ *ein Polynom ist, so ist das allgemeine Integral der Gleichung* $f(w, w') = 0$ *nur dann eindeutig, wenn die algebraische Kurve* $f(z_1, z_2) = 0$ *vom Geschlecht* 0 *oder* 1 *ist.*

§ 3. Das Verhalten der Integrale in der Nähe der singulären Punkte.

Leicht sind hier die festen singulären Stellen z_0 erledigt, für die nach S. 91 der Nenner $f_2(z_0, w)$ identisch in w verschwindet. Am besten übersieht man das bei Einführung eines Parameters t, mit dem sich dann die Differentialgleichung so schreiben läßt:

$$\frac{dw}{dt} = f_1(z, w),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(z, w).$$

Man sieht, daß jetzt $z = z_0$ ein Integral der Differentialgleichung ist. Genau wie S. 55/56 kann man schließen, daß nur durch diejenigen seiner Punkte w_0 eine weitere Lösung hindurchgehen kann, für die zugleich auch $f_1(z_0, w_0) = 0$ ist. Auf solche singuläre Stellen konzentriert sich daher die ausgedehnte Literatur des Gegenstandes, ungeachtet mancher anderen Frage, die man hier analog den im reellen Gebiet gewonnenen Ergebnissen stellen könnte.

Sehr weitschichtig[1]) ist nun die Literatur, welche sich mit den singulären Stellen z_0, w_0 befaßt, für welche $f_1(z_0, w_0) = 0$ und $f_2(z_0, w_0) = 0$ ist. Das Ziel ist es, das funktionentheoretische Verhalten der Lösungen in der Nähe dieser singulären Stellen zu untersuchen, d. h. also z. B. die Raschheit der Annäherung einer Lösung an eine solche singuläre Stelle, den Aufbau ihrer *Riemann*schen Fläche in der Nähe einer solchen Stelle zu übersehen oder, was ein zunächst bescheideneres Ziel ist, überhaupt nur einen Überblick über die Gesamtheit derjenigen Lösungen zu gewinnen, für die $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ gilt, sei es, daß dabei der Limes im üblichen Sinne der Annäherung durch beliebige Nachbarpunkte z gemeint ist, sei es, daß dabei nur an die Annäherung an z_0 längs eines bestimmten Weges gedacht ist. Das sind alles Fragen, über die trotz der Fülle der vorliegenden Literatur und der Unmenge erarbeiteter Einzelergebnisse wenig wirklich Abgerundetes und Abschließendes vorliegt. Hier mag es nun unsere Aufgabe sein, uns wenigstens eine Vorstellung zu verschaffen über diejenigen Lösungen, welche in der singulären Stelle von algebraischem Charakter sind. Und zwar soll das für diejenigen Klassen von Differentialgleichungen geschehen, um die wir uns auch in dem Abschnitt über die reellen Integralkurven bemühten, das sind also wesentlich die Differentialgleichungen

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Cz + Dw + \mathfrak{P}_2(z, w)}{Az + Bw + \mathfrak{P}_1(z, w)} \quad \text{mit} \quad AD - BC \neq 0.$$

$\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind dabei Potenzreihen in z und w, die nur Glieder zweiter und höherer Ordnung enthalten.

Ich werde die Frage nach den Lösungen, welche für $z = 0$ verschwinden und dort algebraischen Charakter haben, nun nach der alten Methode von *Briot* und *Bouquet* zur Entscheidung bringen. Zu dem Zwecke gehe ich mit dem Ansatz

$$w = \alpha_0 z^{\frac{p}{q}} + \dots, \qquad (\alpha_0 \neq 0)$$

also einer nach Potenzen von $z^{\frac{1}{q}}$ fortschreitenden Reihe in die Differentialgleichung hinein. Diese letztere schreibe ich zu diesem Zwecke so:

$$(Az + Bw + \mathfrak{P}_1(z, w))\frac{dw}{dz} - (Cz + Dw + \mathfrak{P}_2(z, w)) = 0.$$

Nun frage ich nach den Gliedern, die bei der Eintragung unseres Ansatzes die niedrigste Ordnung bekommen. Das ist eine Überlegung, welche ganz ähnlich wie in der Theorie der algebraischen Funktionen zur Bestimmung von $\mu = \frac{p}{q}$ führt. Sucht man die Glieder niedrigster Ordnung zusammen, so leuchtet zunächst ein, daß

[1]) Vgl. S. 92.

man dabei aus $\frac{dw}{dz}$ das Glied niedrigster Ordnung zu verwenden hat. Jetzt nehme ich etwa an, zwei Glieder $A_1 z^{\alpha_1} w^{\beta_1} \cdot \alpha_0 z^{\mu-1}$ aus dem ersten und $A_2 z^{\alpha_2} w^{\beta_2}$ aus dem zweiten Summanden hätten gleiche Ordnung. Dann muß also

$$\alpha_1 + \beta_1 \mu + \mu - 1 = \alpha_2 + \beta_2 \mu$$

sein. Das kann man auch so schreiben:

$$\alpha_1 + (\beta_1 + 1)\mu = \alpha_2 + 1 + \beta_2 \mu.$$

Daraus entnimmt man nun eine geometrische Vorschrift zur Auffindung der Glieder niedrigster Ordnung. Man markiere sich in einem rechtwinkligen $\xi\eta$-Koordinatensystem einmal die Punkte $(\alpha_1, \beta_1 + 1)$, die den im ersten Faktor des ersten Summanden vorkommenden Gliedern $A_1 z^{\alpha_1} w^{\beta_1}$ entsprechen, dann die Punkte $(\alpha_2 + 1, \beta_2)$, die den Gliedern $A_2 z^{\alpha_2} w^{\beta_2}$ des zweiten Summanden entsprechen. Alle diese Punkte liegen im ersten Quadranten.

Dann betrachte man die Schar der zueinander parallelen geraden Linien

$$\xi + \mu\eta = \delta.$$

In jedem der markierten Punkte bekommt die linke Seite einen bestimmten Wert. Die Frage nach den Gliedern niedrigster Ordnung ist nun gleichbedeutend mit der Frage nach denjenigen Punkten, für welche diese linke Seite möglichst klein wird. Um den betreffenden Punkt oder die betreffenden Punkte zu finden, lege man die Gerade zunächst bei festem μ so, daß sie alle markierten Punkte auf der einen Seite hat und verschiebe sie dann parallel mit sich, bis sie zum ersten Male einen markierten Punkt trifft. In diesem hat dann $\xi + \mu\eta$ seinen kleinsten Wert. So hat man zunächst bei festgehaltenem μ zu verfahren. Hat man nun bei festem μ einen solchen Punkt gefunden, so kann man unter Änderung von μ die Gerade noch so lange drehen, bis ein zweiter Punkt auf sie zu liegen kommt. Für diese Punkte bekommt dann $\xi + \mu\eta$ den gleichen Wert, während der Ausdruck für keinen anderen Punkt einen kleineren Wert hat. Hiernach ist klar, wie man zur Bestimmung der Glieder niedrigster Ordnung zu verfahren hat. Man verschiebe zunächst die η-Achse parallel mit sich in den ersten Quadranten, bis markierte Punkte darauf liegen und bestimme dann auf dieser Geraden den dem Ursprung am nächsten gelegenen unserer Punkte. Um diesen drehe man dann die Gerade gegen den Uhrzeigersinn so lange herum, bis ein zweiter Punkt darauf zu liegen kommt. Es kann dabei zugleich noch ein dritter darauf zu liegen kommen. Jedenfalls gehe man nun auf der gedrehten Gerade vom Drehpunkt aus bis zum am weitest abgelegenen Punkt vor und drehe dann um diesen die Gerade entgegen dem Uhrzeigersinn weiter. So fährt man fort, bis die Gerade auf die ξ-Achse

gefallen oder ihr parallel geworden ist. Dann hat man ein gegen den Ursprung konvexes Polygon bekommen, das unsere markierten Punkte vom Ursprung trennt. Jede seiner Seiten hat die Eigentümlichkeit, daß die nicht auf ihr gelegenen Punkte Glieder der Differentialgleichung bestimmen, die beim Einsetzen unserer Reihe Glieder ergeben, deren Ordnung größer ist als die der Glieder, deren Punkte auf der Polygonseite liegen. Das der Polygonseite entsprechende μ entnimmt man leicht aus der Gleichung $\xi + \eta\mu = \delta$ der Polygonseite. Es ist sicher rational, da ja auf der Polygonseite mindestens zwei unserer Punkte liegen. Die geschilderte Methode kann in verschiedenen Fällen versagen. Herr *Perron* hat mich darauf aufmerksam gemacht. Z. B. kann es sein, daß ein Punkt $(\alpha_1, \beta_1 + 1)$ mit einem Punkt $(\alpha_2 + 1, \beta_2)$ zusammenfällt. Dann wird, wie z. B. bei $\frac{dw}{dz} = \alpha_z^w$, wo nur (1,1) zu markieren ist, die Methode versagen. Die Gleichung für μ ist hier identisch erfüllt. Das Zusammenfallen zweier Punkte verschiedener Art kann auch zur Folge haben, daß die Polygonmethode falsche Exponenten liefert. Das ist z. B. bei

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{1}{2}w + z^m}{z} \qquad (m \text{ positive ganze Zahl})$$

der Fall. Hier sind die Punkte erster Art (1, 1) und zweiter Art (1, 1), $(m + 1, 0)$ zu markieren. Somit würde die Methode nur $\mu = m$ liefern. Andererseits aber ist $w = \alpha_0 z^{\frac{1}{2}} + \frac{z^m}{m-\frac{1}{2}}$ bei beliebig wählbarem α_0 das allgemeine Integral. Es gibt also überhaupt keines, dessen Glied niedrigster Ordnung von der Form $\alpha_0 z^m$ wäre. Endlich kann die Polygonmethode noch dann versagen, wenn eine Polygonseite durch zwei Punkte gleicher Art bestimmt wird. Denn in der Gleichung für μ müssen Punkte verschiedener Art vorkommen. Jedenfalls muß somit in jedem einzelnen Fall geprüft werden, ob die Methode etwas Brauchbares liefert oder nicht.

In unserem konkreten Fall, wo die Determinante der linearen Glieder nicht Null ist, darf man nach S. 67 im Falle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die Differentialgleichung in dieser Form annehmen:

$$\text{(D)} \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{\lambda_2 w + \mathfrak{P}_2(z, w)}{\lambda_1 z + \mathfrak{P}_1(z, w)}.$$

Auf diesen Fall wollen wir uns beschränken. Hier ist nun der Punkt (1, 1) zu markieren. Er ist sowohl ein Punkt erster Art, wie ein Punkt zweiter Art. (0, 2) und (2, 0) sind sicher nicht vorhanden. Jedenfalls entnimmt man daraus schon, daß das vorhin eingeführte Polygon zwei Seiten hat. Die eine führt von (1, 1) auf die η-Achse zu oder ist ihr parallel, die andere von (1, 1) auf die ξ-Achse zu, oder ist dieser parallel. Von den beiden entsprechenden Werten μ ist der eine größer als Eins und der andere kleiner als Eins. Die eine Gerade kann nur

dann der η-Achse parallel sein, wenn auf dieser selbst keiner der markierten Punkte liegt. Dann aber kommt im Nenner kein von z freies Glied vor und $z = 0$ ist also Lösung. Damit ist dann schon eine in $(0, 0)$ reguläre Lösung gefunden. Ebenso schließt man, daß die eine Gerade nur dann der η-Achse parallel ist, wenn $w = 0$ Lösung ist. Ich will weiter annehmen, daß keiner dieser Fälle vorliegt.

Dann kommen also sowohl Punkt $(0, n)$ wie $(n, 0)$ vor. Dann ist der eine der beiden Werte von $\mu = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, der andere das Reziproke einer ganzen Zahl. Denn das eine Mal muß man $(1, 1)$ mit einem Punkt $(0, n)$, das andere Mal mit einem Punkt $(n, 0)$ verbinden. Hier ist nach dem vorhin Gesagten $n > 2$. Das liefert die Gleichungen

$$1 + \mu = n\mu$$

oder

$$1 + \mu = n$$

für μ.

Und darin liegt die Behauptung. Um nun weiter festzustellen, ob den so bestimmten Werten von $\frac{p}{q}$ auch wirklich Lösungen entsprechen, machen wir in der Differentialgleichung die folgende Substitution

$$z = \mathfrak{z}^q, \quad w = \mathfrak{z}^p \cdot \mathfrak{w}.$$

Dabei nehmen wir p und q als teilerfremde positive ganze Zahlen, von denen, wie wir wissen, immer eine gleich 1, die andere größer als 1 ist. Dann wird die Gleichung

$$\begin{aligned}&\left[\lambda_1 \mathfrak{z}^q + \mathfrak{P}_1(\mathfrak{z}^q, \mathfrak{z}^p \mathfrak{w})\right]\left[p\mathfrak{z}^{p-1}\mathfrak{w} + \mathfrak{z}^p \frac{d\mathfrak{w}}{d\mathfrak{z}}\right]\\ &\quad - \left[\lambda_2 \mathfrak{z}^p \mathfrak{w} + \mathfrak{P}_2(\mathfrak{z}^q, \mathfrak{z}^p \mathfrak{w})\right] q\mathfrak{z}^{q-1} = 0.\end{aligned}$$

Die niedrigste vorkommende Potenz von $\mathfrak{z}$ kann man jedenfalls aus dem Glied ablesen, das zum Punkt $(1, 1)$ führt. Dies ist aber z. B. das Glied $\lambda_1 z$. Daher kommt als niedrigste $\mathfrak{z}$-Potenz in allen Gliedern $\mathfrak{z}^{q+p-1}$ vor. Dadurch kann man durchdividieren. Dann wird die Gleichung

$$(G) \qquad (\lambda_1 + \mathfrak{P}_3(\mathfrak{z}, \mathfrak{w}))(p\mathfrak{w} + \mathfrak{z}\mathfrak{w}') - [\lambda_2 \mathfrak{w} + \mathfrak{P}_4(\mathfrak{z}, \mathfrak{w})]q = 0.$$ [1])

Man kann sie auch so schreiben:

$$\mathfrak{w}' = \frac{\mathfrak{w}(\lambda_2 q - \lambda_1 p) + \mathfrak{P}_5(\mathfrak{z}, \mathfrak{w})}{\mathfrak{z}(\lambda_1 + \mathfrak{P}_3(\mathfrak{z}, \mathfrak{w}))}.$$

Dies endlich kann man so schreiben

$$\mathfrak{w}' = \frac{\mathfrak{w}\left(\frac{\lambda_2 q - \lambda_1 p}{\lambda_1}\right) + \mathfrak{P}_6(\mathfrak{z}, \mathfrak{w})}{\mathfrak{z}}.$$

[1]) Die Potenzreihen $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$, ... enthalten wieder nur Glieder zweiter und höherer Ordnung.

Nun handelt es sich darum, festzustellen, ob diese Gleichung eine bei $\mathfrak{z} = 0$ reguläre Lösung besitzt. Dies kann sicher nur dann der Fall sein, wenn es einen Wert $\mathfrak{w} = \alpha_0$ gibt, der mit $\mathfrak{z} = 0$ zusammen den Zähler zum Verschwinden bringt. Denn nur an einer Stelle, wo Zähler und Nenner verschwinden, kann nach dem Existenztheorem eine andere Lösung die Lösung $\mathfrak{z} = 0$ treffen. Dieser jetzt zu bestimmende $\mathfrak{w}$-Wert ist dann zugleich das Absolutglied in der Entwicklung von $\mathfrak{w}\,(\mathfrak{z})$ nach Potenzen von $\mathfrak{z}$. Die Gleichung, der er genügen muß, erhält man am bequemsten aus der Form (G) unserer Differentialgleichung. Denn der hernach entwickelte reziproke Nenner hat auf diese Frage keinen Einfluß.

Machen wir uns zunächst noch einmal die Bestimmung von μ klar. Man hat dazu zwei Glieder gleicher Ordnung in z nötig. Das eine aber ist immer das zum Punkt $(1, 1)$ führende aus den linearen Gliedern stammende. Das andere müssen wir aus den Potenzreihen $\mathfrak{P}_3$ oder $\mathfrak{P}_4$ holen. Es kommt dafür immer ein Glied in Betracht, dessen repräsentierender Punkt auf die ξ-Achse oder auf die η-Achse zu liegen kommt, und zwar ist unter allen auf einer dieser Achsen liegenden Punkten immer der zu nehmen, der dem Ursprung am nächsten liegt. Man sieht sofort, daß dazu auf der ξ-Achse das niedrigste von w freie Glied aus $\mathfrak{P}_2\,(z, w)$, auf der η-Achse aber das niedrigste von z freie Glied in der Entwicklung von $\mathfrak{P}_1$ verwendet werden muß. Seien diese Glieder etwa $b_{m-1}\,z^{m-1}$ und $a_{n-1}\,w^{n-1}$. Dann findet man daraus sofort die beiden Gleichungen

$$1 + \mu = m$$
$$1 + \mu = n\,\mu$$

für die beiden Werte von μ. Diese beiden μ-Werte also sind dann:

$$\mu = m - 1 \qquad \text{und} \qquad \mu = \frac{1}{n-1}.$$

Mit dieser Kenntnis gehen wir jetzt wieder an die Frage heran, von der wir uns vor kurzem trennten. Wir tragen im Zähler der rechten Seite von Gleichung (G) auf S. 101 ein: $\mathfrak{z} = 0$ und $\mathfrak{w} = \alpha_0$. Wir wollen zu den beiden eben bestimmten Werten von μ die sich daraus für α_0 ergebenden Gleichungen aufschreiben. Die Rechnung führt auf diese beiden Gleichungen:

$$\lambda_1\,(m-1)\,\alpha_0 - \lambda_2\,\alpha_0 - b_{m-1} = 0$$
$$\lambda_1\,\alpha_0 + a_{n-1}\,\alpha_0{}^{n-1} - \lambda_2\,\alpha_0\,(n-1) = 0.$$

Setzt man dann noch $\mathfrak{w} = \alpha_0 + W$, so wird die Differentialgleichung:

$$W' = \frac{W\,\dfrac{\lambda_2 q - \lambda_1 p}{\lambda_1} + \mathfrak{P}_7\,(\mathfrak{z}, W)}{\mathfrak{z}}.$$

In unseren beiden Fällen sieht das insbesondere so aus:

(a) $$W' = \frac{W\frac{\lambda_2 - \lambda_1(m-1)}{\lambda_1} + \mathfrak{P}_7(\mathfrak{z}, W)}{\mathfrak{z}}$$

(b) $$W' = \frac{W\frac{\lambda_2(n-1) - \lambda_1}{\lambda_1} + \mathfrak{P}_7(\mathfrak{z}, W)}{\mathfrak{z}}$$

Unsere Aufgabe ist es nun, diesen Gleichungen durch Funktionen zu genügen, welche bei $\mathfrak{z} = 0$ regulär sind und dort verschwinden.

Die Lösung dieser Aufgabe geschieht durch den Beweis des folgenden Satzes:

Wenn in einer Differentialgleichung

$$z\frac{dw}{dz} = f(z,w) = aw + bz + \dots$$

a keine ganze positive Zahl ist, so besitzt sie genau eine bei $z = 0$ reguläre und dort verschwindende Lösung.

Ich gehe zum Beweis mit dem Ansatz

$$w = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots$$

in die Differentialgleichung hinein. Zur Bestimmung des Koeffizienten α_1 findet man dann sofort die Gleichung

$$\alpha_1 - a\alpha_1 - b = 0.$$

Man hat also

$$\alpha_1 = \frac{b}{1-a}.$$

Das versagt also nur in dem Falle $a = 1$. Zur weiteren Rechnung ist es zunächst bequem, durch den Ansatz

$$w = \left(\frac{b}{1-a} + \mathfrak{w}\right) z$$

eine neue unbekannte Funktion $\mathfrak{w}(z)$ einzuführen, für die auch $\mathfrak{w}(0) = 0$ ist. Für diese findet man dann die Differentialgleichung

$$z\frac{d\mathfrak{w}}{dz} = (a-1)\mathfrak{w} + b'z + \dots.$$

Auf sie kann man dieselbe Überlegung anwenden. So sieht man, daß nach endlich vielen Schritten der Koeffizient von w entweder einen Realteil kleiner oder gleich Null bekommt, es sei denn, daß ursprünglich dieser Koeffizient eine ganze positive Zahl war. In diesem Falle wird nach endlich vielen Schritten der Koeffizient Eins und dann erreicht damit das Verfahren sein natürliches Ende.

Nun beginnt der eigentliche Existenzbeweis, für den ich den Voraussetzungen des Satzes entsprechend den Realteil von a kleiner oder gleich Null annehmen darf. Dieser Existenzbeweis beruht auf der

Methode der unbestimmten Koeffizienten. Man macht wie vorhin den Ansatz

$$w = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots,$$

erhält Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten und hat dann die Konvergenz der gefundenen Reihe zu beweisen. Dies geschieht nach der sogenannten Majorantenmethode. Man findet nämlich, daß die Koeffizienten der gefundenen Reihe absolute Beträge besitzen, kleiner als die Beträge der Koeffizienten, die man erhalten hätte, wenn man die Methode der unbestimmten Koeffizienten auf die Auflösung einer passenden Gleichung $w = \varphi(z, w)$ angewandt hätte. Dies gilt es jetzt zu erkennen.

Durch Differentiation gewinnt man aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} z w' &= f(z, w) \\ z w'' + w' &= \frac{df}{dz} \\ z w''' + 2 w'' &= \frac{d^2 f}{dz^2} \\ z w^{(n)} + (n-1) w^{(n-1)} &= \frac{d^{(n-1)} f}{dz^{n-1}}. \end{aligned}$$

Trägt man hier $z = 0$, $w = 0$ ein, so gewinnt man die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der ${w_0}^{(n)}$, also auch der α_n:

$$\begin{aligned} {w_0}' &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 + {w_0}' a \\ n {w_0}^{(n)} &= \left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}\right)_0 + \ldots + {w_0}^{(n)} a. \end{aligned}$$

Das sind lauter lineare Gleichungen. Man erkennt sofort, daß die Lösungen ${w_0}^{(k)}$ nicht verkleinert werden, wenn man a durch seinen Realteil und die übrigen Koeffizienten in der Entwicklung von $f(z, w)$, durch ihre absoluten Beträge ersetzt. Des weiteren werden die Lösungen nicht verkleinert, wenn man links die Koeffizienten der ${w_0}^{(k)}$ alle durch 1 ersetzt[1]). Dann aber erhält man gerade die Gleichungen, welche die Methode der unbestimmten Koeffizienten bei Anwendung auf die Gleichung $w = \varphi(z, w)$ liefern würde. Dabei hat man unter $\varphi(z, w)$ die Funktion zu verstehen, deren Potenzreihenentwicklung man aus der von $f(z, w)$ dadurch erhält, daß man alle Koeffizienten mit Ausnahme desjenigen von w selbst durch ihre absoluten Beträge ersetzt. Der Koeffizient von w aber wird durch seinen Realteil ersetzt.

Denn dann liefert fortgesetztes Differenzieren die Gleichungen

$$\begin{aligned} {w_0}' &= \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0 \\ {w_0}^{(n)} &= \left(\frac{d^{(n)}\varphi}{dz^{(n)}}\right)_0. \end{aligned}$$

[1]) Setzt man $a = \alpha + i\beta$, so folgt aus $\alpha \leqq 0$, daß $|n - a|^2 = |n - \alpha|^2 + \beta^2 \geqq |1 - \alpha|^2 + \beta^2 \geqq |1 - \alpha|^2$. Also wird $|n - a| \geqq 1 - \alpha$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen[1]) konvergiert aber die Potenzreihe, welche aus den aus diesen Gleichungen zu berechnenden Koeffizienten gebildet wird, in einer gewissen Umgebung von $z = 0$. Also ist das gleiche erst recht für diejenige Reihe der Fall, die man aus der Differentialgleichung findet, denn diese hat kleinere Koeffizienten. Unser Satz ist damit bewiesen.

Ich kehre zu den beiden Differentialgleichungen (a), (b) der S. 103 zurück, um auf sie den jetzt bewiesenen Satz anzuwenden. Er lehrt, daß (a) und (b) jedenfalls dann ein bei $\mathfrak{z} = 0$ reguläres und verschwindendes Integral besitzten, wenn die Zahl $\frac{\lambda_2 p - \lambda_1 q}{\lambda_1}$ keine ganze positive Zahl ist. Daraus wieder folgt, daß die Differentialgleichung (D) von S. 100 zwei Integrale von algebraischem Charakter besitzt[2]), falls nicht $\frac{\lambda_2 p - \lambda_1 q}{\lambda_1}$ eine ganze positive Zahl ist.

Nun bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo $\frac{\lambda_2 p - \lambda_1 q}{\lambda_1}$ eine ganze positive Zahl ist. Dabei kann entweder $\frac{\lambda_2 - \lambda_1 (m-1)}{\lambda_1}$ oder $\frac{\lambda_2 (n-1) - \lambda_1}{\lambda_1}$ oder schließlich jede der beiden eine ganze positive Zahl sein. Es genügt, einen der Fälle weiter zu betrachten. Knüpfen wir etwa an die Gleichung (a) der S. 103 an. Durch den S. 103 beschriebenen Prozeß kann man den Koeffizienten von W zu 1 machen. Dabei kommt dann eine Differentialgleichung dieser Gestalt heraus

$$(\Gamma) \qquad W' = \frac{W + b\mathfrak{z} + \mathfrak{P}(\mathfrak{z}, W)}{\mathfrak{z}}.$$

Wir haben festzustellen, ob sie reguläre, bei $\mathfrak{z} = 0$ verschwindende Integrale besitzt. Wenn zunächst $b = 0$ ist, so kann der beschriebene Prozeß noch fortgesetzt werden. Denn man mache den Ansatz

$$W = \mathfrak{z} W_1$$

dann findet man für W_1 die Gleichung

$$W_1' = \mathfrak{P}^*(\mathfrak{z}, W_1).$$

Dabei ist nun $\mathfrak{P}^*(\mathfrak{z}, W_1)$ eine nach Potenzen von $\mathfrak{z}$ und W_1 fortschreitende Reihe, die auch Absolutglied und lineare Glieder enthalten kann. Diese Differentialgleichung besitzt nun bei $\mathfrak{z} = 0$ keine Singularität mehr. Man kann sie mit einem bei $\mathfrak{z} = 0$ beliebig vorgegebenen Anfangswert integrieren. In diesem Falle hat nun die Differentialgleichung (D) eine ganze Schar von einem Parameter abhängender algebraischer Integrale. Das ist der Fall $\frac{\lambda_2 p - \lambda_1 q}{\lambda_1}$ = ganze

[1]) Vgl. z. B. mein Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, S. 192.

[2]) Eines ist regulär, das andere entspricht in seinen $n-1$ Zweigen, die zyklisch um $z = 0$ zusammenhängen, den $n-1$ Wurzeln der Gleichung für α_0.

positive Zahl mit der Nebenbedingung, daß die vorhin genannte Zahl $b = 0$ ist. Ich komme zu dem Falle, wo diese Zahl $b \neq 0$ ist. Dann besitzt die Differentialgleichung (Γ), von der wieder die Rede ist, überhaupt kein bei $\zeta = 0$ verschwindendes reguläres Integral. Denn der Ansatz

$$W_1 = \beta_0 \zeta + \cdots$$

führt dann auf die Gleichung

$$\beta_0 = b + \beta_0,$$

die nur für $b = 0$ erfüllt werden kann.

Schließlich ist noch zu beachten, daß nach den Betrachtungen, die wir schon S. 100 über die Tragweite der Methode anstellten, keine Gewähr dafür gegeben ist, daß nicht noch weitere bei $z = 0$ algebraische Integrale von (D) existieren. Der doppelt zählende Punkt (1, 1) könnte dazu Anlaß geben.

Bemerkung: Die vorstehenden Darlegungen enthalten eine Methode zur Bestimmung der durch den Ursprung gehenden Integrale, welche dort algebraischen Charakter besitzen. Freilich lassen die Ergebnisse an Einfachheit und Allgemeinheit manches zu wünschen übrig. Man wäre nicht berechtigt, daran Kritik zu üben, wenn man nichts Befriedigenderes aussagen könnte. In der Tat aber kann man mit anderen von *Picard* und *Poincaré* benutzten Methoden weiterkommen, z. B. erkennen, daß stets mindestens ein Integral von algebraischem Charakter durch den Ursprung geht. Zur Darlegung dieser Methoden sind Hilfsmittel aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen nötig. Der Grundgedanke dieser Methoden ist nämlich der, alle Lösungen auf die Form $F(z, w) = c$ zu bringen. Dabei ist c die Integrationskonstante. $F(z, w)$ aber muß dann der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial z} \cdot f_2 + \frac{\partial u}{\partial w} f_1 = 0$$

genügen. Es handelt sich darum, Aussagen über den analytischen Charakter dieser Funktion $F(z, w)$ in der Umgebung des Ursprungs zu machen.

Zweiter Abschnitt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

1. Kapitel.

Die Existenz der Lösungen.

§ 1. Die Methode der sukzessiven Approximationen.

Wir können uns kurz fassen, denn es handelt sich im wesentlichen um eine Übertragung des bei den Differentialgleichungen erster Ordnung Gesagten. Wir nehmen die Differentialgleichung in der Form

$$y'' = f(x, y, y')$$

an und setzen voraus, daß $f(x, y, y')$ in einem gewissen Bereich des (x, y, y')-Raumes eindeutig und stetig erklärt sei und partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}$$

besitze. Wir werden beweisen, *daß es dann zu jeder dem Bereich angehörigen Anfangsbedingung, d. h. zu jedem Wertetripel* x_0, y_0, y_0', *das als System der Koordinaten eines inneren Bereichpunktes aufgefaßt werden kann, eine und nur eine zweimal stetig differenzierbare Lösung*

$$y = y(x)$$

gibt, die für $x = x_0$ *den Wert* y_0 *annimmt und deren Ableitung an der Stelle* x_0 *den Wert* y_0' *hat.*

Man kann geometrisch den Sachverhalt auch so aussprechen: Ein gewisser Bereich der x-y-Ebene ist vorgelegt; jedem Punkt sind gewisse zulässige Richtungen zugeordnet. Das Wertetripel x, y, y', wo x, y einem Bereichpunkt, y' einer zulässigen Richtung in diesem Punkt zugehören, werde als Koordinatentripel eines Punktes des dreidimensionalen Bereiches aufgefaßt. Diese Punkte machen einen Be-

reich aus, in dem $f(x, y, y')$ eindeutig und stetig erklärt ist und Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ besitzt. *Dann geht durch jeden Bereichpunkt der x-y-Ebene in jeder zulässigen Richtung genau eine Lösung.*

Man faßt den Satz am besten als Spezialfall eines etwas allgemeineren über *Systeme von Differentialgleichungen* auf. Setzt man nämlich $y' = z$, so ist die Gleichung zweiter Ordnung gleichbedeutend mit dem System erster Ordnung

$$z' = f(x, y, z)$$
$$y' = z$$

mit zwei unbekannten Funktionen $y(x)$ und $z(x)$. Das allgemeinste derartige System hat die Gestalt

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \varphi(x, y, z) \\ z' = \psi(x, y, z). \end{array} \right. \tag{1}$$

Dabei sollen $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ in einem gewissen Bereich $K: |x - x_0| \leqq a, |y - y_0| \leqq b, |z - z_0| \leqq c$ des x-y-z-Raumes als eindeutige und stetige Funktionen erklärt sein, welche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach y und z besitzen. Da man

$$y = y(x) \quad \text{und} \quad z = z(x)$$

als die Gleichungen einer Raumkurve auffassen kann, so lautet der hier zu beweisende Satz so, daß *durch jeden Punkt des Bereiches K genau eine Lösungskurve des Systems* (1) *geht.*

Der Beweis kann wie auf S. 25ff. nach der Methode der sukzessiven Approximationen erbracht werden. Nur eines sei hervorgehoben. Alle Überlegungen sind daran gebunden, daß die bei dem Verfahren gewonnenen Näherungsfunktionen stets Kurven aus dem Bereich K darstellen. Denn sonst würde das Einsetzen in die Funktionen φ, ψ nicht möglich sein, da diese nur im Bereich K zur Verfügung stehen. Offenbar ist dazu eben nur zu fordern, daß die Funktionen $|y_n(x) - y_0|$ und $|z_n(x) - z_0|$ nicht zu groß werden. Wegen der wieder geltenden Ungleichungen der Form

$$|y_n(x) - y_0| < \mathsf{M}\,|x - x_0|$$
$$|z_n(x) - z_0| < \mathsf{M}\,|x - x_0|$$

ist dazu aber nur zu verlangen, daß das Intervall $|x - x_0|$ nicht zu groß wird.

Wenn also z. B. $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ im Bereich $a \leqq x \leqq b$ für beliebige y und z stetig differenzierbar sind, so entfallen diese Bedingungen und das Verfahren der sukzessiven Approximation konvergiert im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$. In diesem ganzen Intervall sind also $y(x)$ und $z(x)$ stetige Funktionen. Wenn $f(x, y, y')$ eine analytische Funktion ist, so kann der Satz dahin ergänzt werden, daß auch die Lösungen analytisch sind.

Auch die früher bewiesenen Sätze über die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen und vom Parameter lassen sich ohne weiteres übertragen.

§ 2. Geometrische Veranschaulichung.

Ähnlich wie Differentialgleichungen erster Ordnung kann man auch Differentialgleichungen zweiter Ordnung geometrisch veranschaulichen. Jeder Gleichung zweiter Ordnung entspricht ein *Krümmungsfeld.* Denn die Gleichung ordnet jedem Linienelement x, y, y' den Wert $f(x, y, y')$ für die zweite Ableitung y'' zu. Dadurch ist aber der Krümmungskreis der Integralkurve bestimmt. Die Differentialgeometrie lehrt ja, daß

$$r = \left| \frac{\sqrt{1+y'^2}^3}{y''} \right|$$

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} y'$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt festlegen. Man kann sich hiernach näherungsweise die Konstruktion einer Integralkurve so denken: Man fixiere zunächst das Anfangselement, also Anfangspunkt und Anfangsrichtung. Alsdann bestimme man den zugehörigen Krümmungskreis und gehe auf demselben ein Stück weiter. Man halte an und bestimme zu der letzten Kreisrichtung den neuen zugehörigen Krümmungskreis und gehe auf diesem ein Stück weiter usw.

Man hat also nun nicht mehr nur eine Anfangsbedingung nötig, um eine Lösung festzulegen, sondern deren zwei. Es genügt nicht, den Anfangspunkt zu kennen, es muß auch die Anfangsrichtung in diesem Punkt gegeben sein, um die Lösung festzulegen. Die Lösungen bilden also eine zweiparametrige Schar von Kurven. Als Parameter können ja die zu einer bestimmten Abszisse x gehörigen Ordinaten und ersten Ableitungen angesehen werden.

Man überzeugt sich leicht, daß auch umgekehrt jede zweiparametrige Kurvenschar unter den nötigen Differenzierbarkeitsbedingungen als Lösungsschar einer Differentialgleichung 2. Ordnung aufgefaßt werden kann. Denn aus der Schargleichung

$$\varphi(x, y, a, b) = 0$$

und den abgeleiteten Gleichungen

$$\varphi_x + \varphi_y y' = 0,$$
$$\varphi_{xx} + 2\varphi_{xy} y' + \varphi_{yy} y'^2 + \varphi_y y'' = 0$$

wird man im allgemeinen a und b eliminieren können und dadurch eine Differentialgleichung 2. Ordnung erhalten.

Wichtig ist es uns, daß man die vorhin gegebene geometrische Deutung manchmal zur vollen Integration einer Differentialgleichung ausbeuten kann. Ich will das am Beispiel

$$y'' = 2\frac{(1+y'^2)(xy'-y)}{x^2+y^2}$$

kurz darlegen. Man findet für den zum Linienelement x_0, y_0, y_0' gehörigen Krümmungsmittelpunkt die Koordinaten

$$\xi = \frac{(x_0^2 - y_0^2)\,y_0' - 2\,x_0\,y_0}{2\,(x_0\,y_0' - y_0)},$$

$$\eta = \frac{x_0^2 - y_0^2 + 2\,x_0\,y_0\,y_0'}{2\,(x_0\,y_0' - y_0)}.$$

Eliminiert man y_0', so hat man die Gleichung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte aller zum Punkt x_0, y_0 gehörigen Linienelemente. Man findet die gerade Linie

$$2\,\xi\,x_0 + 2\,\eta\,y_0 = x_0^2 + y_0^2.$$

Sie ist einfach die Mittelsenkrechte der Strecke vom Ursprung nach dem Punkt x_0, y_0. Daher sind die Krümmungskreise die Kreise durch den Ursprung und durch x_0, y_0. Da für jedes Linienelement eines solchen Kreises die gleiche Konstruktion gilt, so besteht er aus lauter Krümmungselementen der Differentialgleichung und daher ist jeder dieser Kreise eine Integralkurve. So erkennt man, daß die Integralkurven aus der Gesamtheit der Kreise durch den Ursprung bestehen. Ihre Gleichung ist also

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2.$$

Man verifiziert leicht noch nachträglich durch Rechnung die Richtigkeit dieses Resultates.

Nun zu den Systemen von zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen. Seien also die rechten Seiten des Systems

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z)$$

in einem Bereich eindeutig, stetig und stetig differenzierbar erklärt. Jedem Punkt ist dann eine Richtung zugeordnet und die Integrale sind geometrisch als Raumkurven zu deuten, die jeden Punkt in der dort vorgeschriebenen Richtung passieren. Die Grund- und Aufrißmethode der darstellenden Geometrie gibt leicht einen Gedanken zur näherungsweisen Konstruktion der Integralkurven an die Hand: Man geht vom Anfangspunkt aus ein Stückchen in der dort vorgeschriebenen Richtung weiter, im so erreichten Punkt geht man zu der dort vorgeschriebenen Richtung über und verfolgt sie ein Stückchen usw.

Will man im Reellen — nur davon ist bei diesen Konstruktionen die Rede — die Genauigkeit dieser Näherungen prüfen, so muß man sich wieder an die Darlegungen des vorigen Paragraphen erinnern.

Denn betrachten wir z. B. noch einmal die Gleichungen 2. Ordnung. Man kann sie sich durch die Flächen

$$f(x, y, z) = c$$

im x-y-z-Raum dargestellt denken. Unsere Näherungsmethode läuft dann darauf hinaus, in dem Raum zwischen zwei aufeinanderfolgenden dieser Flächen y'' konstant zu nehmen. Kennt man also die Schwankung von $f(x, y, z)$ zwischen zwei solchen Flächen, so läuft unsere Näherung darauf hinaus, das gegebene System

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{dx} = z$$

durch ein System

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z) + A(x, y, z),$$

$$\frac{dy}{dx} = z$$

zu ersetzen, in dem $A(x, y, z)$ dem Betrag nach nicht größer ist als die erwähnte Maximalschwankung. Daher kann man an Hand der Methode der sukzessiven Approximationen die Güte der Näherung abschätzen.

Ähnlich kann man bei der für Systeme angegebenen Näherung vorgehen. Man führe wieder etwa die Flächen $\frac{dz}{dx} = \text{konst.}$ im x-y-z-Raum ein. Sie sind

$$\psi(x, y, z) = \text{konst.}$$

Auf diesen Flächen variiert noch $\frac{dy}{dx}$. Zwischen zwei solchen Flächen ersetzt nun unsere Näherungsmethode die Integralraumkurven durch gerade Linien, deren z' mit dem auf der einen Fläche fest vorgeschriebenen übereinstimmt und deren y' mit demjenigen übereinstimmt, das in dem Flächenpunkt herrscht, durch den die Gerade geht. Diese Geraden sind also windschief und sie erklären zwischen den beiden Flächen das benutzte Näherungsfeld. Seine Richtungen seien durch

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z) + A(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z) + B(x, y, z)$$

gegeben, dann können A und B dem Betrag nach die Schwankung der Funktionen φ und ψ zwischen zwei aufeinanderfolgenden der eingeführten Flächen nicht übertreffen. Damit werden die früheren Methoden wieder anwendbar.

2. Kapitel.

Elementare Integrationsmethoden.

§ 1. Einige Typen von Differentialgleichungen.

Bei der Gleichung

$$y'' = f(y)$$

ermöglicht ein kleiner Kunstgriff leicht die Integration. Multipliziert man nämlich die Gleichung mit y', so hat man

$$y'\,y'' = y'\,f(y).$$

Integriert man beide Seiten nach x, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\,y'^2 = \int f(y)\,dy + h$$

und das ist dann eine durch Trennung der Variablen zu behandelnde Differentialgleichung 1. Ordnung.

Auch

(1) $$y'' = f(y')$$

läßt sich elementar integrieren. Man führt $y' = p$ als neue unbekannte Funktion ein und reduziert damit die Gleichung auf eine der 1. Ordnung

$$p' = f(p).$$

Das liefert sofort

(2) $$x = \int \frac{dp}{f(p)}.$$

Um nun aber weiter zu integrieren, müßte man erst nach p auflösen. Daher ist es besser, p als Parameter aufzufassen. Dann hat man ja schon x in Parameterdarstellung. Um das noch fehlende y zu bekommen, geht man von

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dp} = p\cdot\frac{1}{f(p)}$$

aus und findet

(3) $$y = \int \frac{p}{f(p)}\,dp.$$

(2) und (3) stellen, wie man leicht verifiziert, in jedem Stetigkeitsintervall von $f(p)$, in dem $f(p) \neq 0$, eine Lösung von (1) dar.

Auch die allgemeineren Gleichungen

$$f(x, y', y'') = 0$$

werden durch die Einführung von $y' = p$ sofort auf Gleichungen 1. Ordnung zurückgeführt:

$$f(x, p, p') = 0.$$

An

$$f(y'', y', y) = 0$$

kommt man durch Vertauschung von x und y heran. Dadurch wird die Gleichung zu

$$f\left(\frac{-x''}{(x')^3}, \frac{1}{x'}, y\right) = 0,$$

ein Typus, von dem gerade die Rede war.

Bei

$$f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$$

führt der Ansatz

$$\frac{y'}{y} = u$$

zum Ziel. Man hat dann

$$y' = uy$$
$$y'' = uy' + u'y = u'y + u^2 y.$$

Trägt man dies in die Gleichung ein, so wird sie

$$f(x, u, u^2 + u') = 0.$$

Diese letzte Gleichung zusammen mit

$$y' = uy$$

sind mit der gegebenen Gleichung gleichwertig.

§ 2. Die Differentialgleichung der Kettenlinie.

Diese Differentialgleichung gehört zwar zu den schon im vorigen Paragraphen behandelten Typen. Wir wollen aber an ihrem Beispiel erkennen, daß es häufig schwieriger ist, die Integrationskonstanten so zu bestimmen, daß den gegebenen Anfangsbedingungen genügt wird, als alle Lösungen der Differentialgleichung zu bestimmen. Gerade diese Fragen stehen bei den Gleichungen zweiter Ordnung im Mittelpunkt des Interesses. Es ist nur ein ganz spezieller Fall der Randwertaufgaben, d. i. der Bestimmung der Integrationskonstanten aus gegebenen Bedingungen, wenn man diejenige Lösung verlangt, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 und deren Ableitung daselbst den Wert y_0' annimmt. Bei der Aufgabe der Kettenlinie handelt es sich darum, die Gestalt einer Kette von gegebener Länge zu bestimmen, die zwischen zwei gegebenen Punkten aufgespannt ist. In mathematischer Formulierung besagt dies: man soll diejenige Lösung von

$$y'' = \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

finden, welche für $x = x_0$ den Wert y_0 und für $x = x_1$ den Wert y_1 hat und deren zwischen diesen beiden Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gelegener Bogen die Länge L hat. Es scheint auffällig, daß man drei Bedingungen

an die zwei Integrationskonstanten stellen kann. Man sollte meinen, daß die beiden Bedingungen, die darin liegen, daß die Kettenlinie durch zwei gegebene Punkte gehen soll, schon zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten ausreichten. Wie sich dieser scheinbare Widerspruch aufklärt, wird sich bald zeigen. Trägt man $y' = p$ in die Gleichung ein, so hat man

$$p' = \lambda \sqrt{1 + p^2}$$

zu integrieren. Das liefert[1])

$$x = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, p + h_1 .$$

Daraus folgt

$$y' = p = \mathfrak{Sin}\,(x - h_1)\,\lambda .$$

Nochmalige Integration liefert also

$$y = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{Cof}\,(x - h_1)\,\lambda + h_2 .$$

Nun wird die Länge des Kettenlinienstückes zwischen x_0 und x_1

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_1} y''\, dx = \frac{1}{\lambda} \left(\mathfrak{Sin}\,(x_1 - h_1)\lambda - \mathfrak{Sin}\,(x_0 - h_1)\,\lambda\right)$$
$$= \frac{2}{\lambda} \mathfrak{Cof}\left(\frac{x_0 + x_1 - 2h_1}{2}\,\lambda\right) \mathfrak{Sin}\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\,\lambda\right).$$

Also haben wir die Bedingung

$$(1) \qquad L = \frac{2}{\lambda} \mathfrak{Cof}\left(\frac{x_0 + x_1 - 2h_1}{2}\,\lambda\right) \mathfrak{Sin}\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\,\lambda\right).$$

---

[1]) Dabei ist in bekannter Weise der hyperbolische Kosinus durch

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos ix \quad (i = \sqrt{-1})$$

der hyperbolische Sinus durch

$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i \sin ix$$

erklärt. Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$$

und

$$\frac{d\, \mathfrak{Cof}\, x}{dx} = \mathfrak{Sin}\, x \quad \text{und} \quad \frac{d\, \mathfrak{Sin}\, x}{dx} = \mathfrak{Cof}\, x .$$

Die Umkehrungsfunktionen sind

$$\mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cof}\, x \quad \text{und} \quad \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, x .$$

Für sie findet man in bekannter Weise

$$\frac{d\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Cof}\, x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{und} \quad \frac{d\, \mathfrak{Ar}\, \mathfrak{Sin}\, x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

Mit Hilfe der oben angegebenen Beziehungen zu den trigonometrischen Funktionen lassen sich leicht die goniometrischen Formeln übertragen, die wir im Text zum Teil benutzen werden.

Ferner aber haben wir die beiden „Randbedingungen“ für Intervallanfang und -ende:

$$y_0 = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{Cof}\,(x_0 - h_1)\,\lambda + h_2,$$

$$y_1 = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{Cof}\,(x_1 - h_1)\,\lambda + h_2.$$

Subtraktion beider liefert

$$(2) \qquad y_1 - y_0 = \frac{2}{\lambda} \mathfrak{Sin}\left(\frac{x_0 + x_1 - 2h_1}{2}\lambda\right) \mathfrak{Sin}\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\lambda\right).$$

Die beiden Bedingungen (1) und (2) müßten also für die eine Integrationskonstante h_1 bestehen. Es erscheint ausgeschlossen, daß man h_1 diesen beiden Forderungen gemäß wählen kann. Vielmehr muß man auch noch den Koeffizienten λ der Differentialgleichung als unbestimmt ansehen. Dann wird sich zeigen, daß man h_1 *und* λ so wählen kann, daß die beiden Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Das hat physikalisch einen wohl bestimmten Sinn, denn der Koeffizient λ ist gleich dem Quotienten aus dem Gewicht der Ketteneinheit und der Horizontalkomponente der Kettenspannung. Diese letztere hängt aber von der Kettenlänge, und damit von den Randbedingungen ab in einer Art und Weise, die eben erst nach Integration der Differentialgleichung in der nun gleich anzugebenden Weise ausfindig gemacht werden kann. Ich eliminiere zunächst h_1 aus (1) und (2), indem ich beide quadriere und subtrahiere. Das liefert

$$L^2 - (y_1 - y_0)^2 = \frac{4}{\lambda^2} \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\lambda\right)$$

oder

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{x_1 - x_0}{2}\lambda}{\frac{x_1 - x_0}{2}\lambda} = \frac{\sqrt{L^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0}.$$

Setze ich

$$\frac{x_1 - x_0}{2}\lambda = \xi \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{L^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0} = \alpha,$$

so habe ich also die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\xi} = \alpha$$

nach ξ aufzulösen. Das liefert mir den Wert von λ. Die Auflösung geschieht graphisch oder mit Hilfe einer hyperbolischen Sinustafel[1]).

Man sieht sofort, daß das wegen $x_1 > x_0$ und nach der physikalischen Bedeutung von λ notwendig positive ξ durch α eindeutig bestimmt ist. Somit ist auch der Parameter λ durch die Seillänge und die Intervallänge eindeutig festgelegt. Kennt man erst einmal λ,

[1]) Z. B. *Jahnke-Emde:* Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig 1909.

so bietet ersichtlich die Bestimmung zunächst von h_1 aus (2) und dann von h_2 mit Hilfe von Tafeln keine wesentlichen Schwierigkeiten. Es mag auffallen, daß nur für $\alpha < 1$ sich Gerade $\eta = \alpha\xi$ und Sinuskurve $\eta = \mathfrak{Sin}\,\xi$ außerhalb des Nullpunktes schneiden, denn diese geht unter 45 Grad durch den Nullpunkt. Der innere Grund hierfür liegt darin, daß doch sicher die Seillänge größer sein muß als der Abstand der beiden durch das Seil zu verbindenden Punkte. Der Quotient beider Längen ist aber gerade α.

Man überzeugt sich übrigens leicht durch geometrische Betrachtungen, daß für jeden Wert des Parameters λ genau eine Kettenlinie von passender Länge durch die beiden gegebenen Punkte geht. Denn alle Kettenlinien gehen, wie ein Blick auf ihre Gleichung zeigt, bei festem λ durch Parallelverschiebungen auseinander hervor. Man erhält also alle Lösungen durch einen der beiden Punkte, wenn man eine Kettenlinie an diesem Punkt entlang schiebt. Dann nimmt sie aber ein einziges Mal eine Lage an, bei der sie auch durch den anderen Punkt geht.

§ 3. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Diese haben die Gestalt

$$y'' + g\,y' + h\,y = f(x). \tag{1}$$

Dabei sind g und h Konstanten, $f(x)$ irgend eine in einem gegebenen Intervall stetige Funktion. Wenn dieselbe identisch Null ist, so haben wir es mit der homogenen Gleichung

$$y'' + g\,y' + h\,y = 0 \tag{2}$$

zu tun. Wenn $f(x)$ nicht identisch Null ist, so nennt man (1) eine inhomogene Gleichung. Wir beschäftigen uns zunächst mit der homogenen.

Man kann sie stets auf die Gestalt

$$y'' + c\,y = 0 \tag{3}$$

bringen und dann nach den allgemeinen Methoden von S. 112 weiter behandeln. c ist dabei wieder eine Konstante. Ich will auf diese Transformation erst mit ein paar Worten eingehen, obwohl das nicht die eigentliche Methode zur Behandlung der linearen Differentialgleichungen ist.

Man kann *jede*[1]) *lineare Differentialgleichung*

$$y'' + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = f(x) \tag{3}$$

durch die Substitution

$$y = u \cdot v$$

[1]) Die Anwendbarkeit der Methode ist an die Bedingung geknüpft, daß $\varphi_1'(x)$ stetig ist.

mit passend gewähltem u auf die Gestalt

$$v'' + \varphi(x) \cdot v = f(x)$$

bringen. Geht man nämlich mit $y = u \cdot v$ in die Gleichung (3) hinein, so wird sie zunächst

$$v'' \cdot u + v'(2u' + \varphi_1(x)\, u) + v(u'' + \varphi_1(x)\, u' + \varphi_0(x)\, u) = f(x).$$

Bestimmt man dann aber u aus der Bedingung

$$2u' + \varphi_1(x)\, u = 0,$$

so wird die Gleichung

$$v'' \cdot u + v(u'' + \varphi_1(x)\, u' + \varphi_0(x)\, u) = f(x)$$

oder ausführlicher

$$v'' + v\left[\varphi_0(x) - \frac{1}{4}(\varphi_1^2 + 2\varphi_1')\right] = f(x)\frac{1}{u}.$$

Wenn aber namentlich $\varphi_1 = g$ und $\varphi_0 = h$ konstant sind, so wird hieraus

$$v'' + \left(g - \frac{h^2}{4}\right) v = f(x).$$

Das ist eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Indessen mag es dem Leser überlassen bleiben, diese Integrationsmethode zu Ende zu führen. Hier möchte ich lieber ein anderes Verfahren zur Darstellung bringen. Es beruht darauf, daß man mit dem Ansatz

$$y = e^{rx} \qquad (r \text{ konstant})$$

in die Differentialgleichung (1) hineingeht. Das möge zunächst an

(3) $$y'' + cy = 0$$

auseinandergesetzt werden. Unser Ansatz führt hier auf

$$e^{rx}(r^2 + c) = 0;$$

unterdrückt man den Faktor e^{rx}, so hat man die quadratische Gleichung

$$r^2 + c = 0$$

für r. Man bekommt so also die beiden Lösungen

$$y_1 = e^{\sqrt{-c}\,x},$$
$$y_2 = e^{-\sqrt{-c}\,x}.$$

Scheinbar ist damit nun nicht viel gewonnen. Denn wir haben zwei ganz spezielle Lösungen gefunden. Unser eigentliches Ziel aber ist es doch, die allgemeine Lösung zu finden, die zwei willkürliche Integrationskonstanten enthält. Denn erst dann kann man diese Konstanten so zu bestimmen suchen, daß die Lösung zwei vorgebbaren Anfangsbedingungen genügt, daß sie also z. B. einen gegebenen Punkt in gegebener Richtung passiert, daß für sie also $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ ist.

Da setzt aber wieder eine ganz *allgemeine Eigenschaft aller linearen homogenen Differentialgleichungen* ein. Ist nämlich $y(x)$ Lösung irgend-

einer linearen homogenen Differentialgleichung, so ist auch jedes konstante Multiplum $Y(x) = \gamma y(x)$ derselben eine Lösung. Denn es wird ja

$$Y'' + \varphi_1(x) Y' + \varphi_0(x) Y = \gamma (y'' + \varphi_1(x) y' + \varphi_0(x) y) = 0.$$

Ebenso ist die Summe zweier Lösungen y_1 und y_2 wieder Lösung. Denn es ist ja

$$\begin{aligned}&(y_1 + y_2)'' + \varphi_1(x)(y_1 + y_2)' + \varphi_0(x)(y_1 + y_2)\\ &= (y_1'' + \varphi_1(x) y_1' + \varphi_0(x) y_1) + (y_2'' + \varphi_1(x) y_2' + \varphi_0(x) y_2) = 0.\end{aligned}$$

Wenn wir dies auf Gleichung (3) anwenden, so wird also

$$y = c_1 e^{\sqrt{-c}x} + c_2 e^{-\sqrt{-c}x}$$

gleichfalls Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'' + c y = 0.$$

Dabei sind c_1 und c_2 zwei willkürliche Konstanten. Damit haben wir nun in der Tat die allgemeine Lösung gefunden. Denn man sieht leicht ein, daß man c_1 und c_2 so bestimmen kann, daß sowohl die Lösung wie ihre Ableitung für $x = x_0$ gegebene Werte annehmen. Dazu sind ja nur die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}y_0 &= c_1 e^{\sqrt{-c}x_0} + c_2 e^{-\sqrt{-c}x_0},\\ y_0' &= c_1 \sqrt{-c}\, e^{\sqrt{-c}x_0} - c_2 \sqrt{-c}\, e^{-\sqrt{-c}x_0}\end{aligned}$$

nach c_1 und c_2 aufzulösen. Man erkennt aber beim Versuch sofort, daß dies stets möglich ist, wenn nur c nicht verschwindet. Das sei also vorausgesetzt. Wir haben also tatsächlich die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung gefunden. Wir wollen sie uns noch etwas näher ansehen. Wir gehen zunächst auf den Umstand ein, daß sie nicht stets in reeller Gestalt auftritt. Das ist dann der Fall, wenn $c < 0$ ist.

Wenn aber $c > 0$ ist, so haben wir z. B. in

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \cos \sqrt{c}\, x$$

und

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin \sqrt{c}\, x$$

zwei reelle Lösungen und in

$$y = c_1 \cos \sqrt{c}\, x + c_2 \sin \sqrt{c}\, x$$

eine zweiparametrige Schar von solchen, wenn wir nur den c_1 und c_2 beliebige reelle Werte beilegen. Daß dies dann wieder die allgemeine Lösung ist, ergibt sich natürlich schon aus den vorigen Darlegungen, kann aber auch leicht noch einmal nachgeprüft werden.

Ich will lieber gleich für die *allgemeine lineare homogene Differentialgleichung* die Frage behandeln, wann zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 ein *Fundamentalsystem* bilden, d. h. wann man alle Lösungen durch lineare Kombination derselben darstellen kann. Es wird sich ergeben, daß dies stets dann der Fall ist, wenn ihr Quotient nicht

konstant ist. Jedenfalls darf dann keine derselben identisch verschwinden. Um das einzusehen, haben wir nur zu fragen, wann die beiden Gleichungen

$$y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0),$$
$$y_0' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0)$$

nach c_1 und c_2 auflösbar sind für beliebige x_0, y_0 und y_0'. Man erkennt sofort in

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 \neq 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung[1]). Dann ist aber sicher nicht der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ konstant. Denn aus

$$y_1 = c\, y_2$$

folgt

$$y_1' = c\, y_2'$$

und das zieht

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = 0$$

nach sich. Umgekehrt folgt aus

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = 0$$

in jedem Intervall, in dem weder y_1 noch y_2 verschwinden, daß

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2},$$

also daß

$$\log y_1 = \log y_2 + \log h$$

oder daß

$$y_1 = h\, y_2$$

ist. Beim Übergang über eine Nullstelle x_0 von y_1 oder y_2 kann aber diese Konstante sich nicht ändern, weil doch die Ableitungen y_1' und y_2' in x_0 stetig und von Null verschieden sind[2]).

Wenden wir dies allgemeine Ergebnis auf unseren speziellen Fall an, so sehen wir sofort, daß

$$\cos \sqrt{c}\, x \quad \text{und} \quad \sin \sqrt{c}\, x$$

ein Fundamentalsystem bilden.

Man erkennt bei *konstantem* c einen wesentlichen Unterschied der Lösungen für $c < 0$ und für $c > 0$ darin, daß im zweiten Fall periodische Funktionen mit der Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$ herauskommen, während im ersten Fall

---

[1]) Ist diese Bedingung an irgendeiner Stelle x_0 erfüllt, so ist sie aus Stetigkeitsgründen auch gleich in einem diese Stelle umgebenden Intervall erfüllt. Überdies lehrt Formel (F) von S. 120, daß sie dann sogar in dem diese Stelle enthaltenden Stetigkeitsintervall von $\varphi_1(x)$ überall erfüllt ist.

[2]) S. 143 wird ausdrücklich bewiesen werden, daß sich in einem Intervall, wo die Koeffizienten der Differentialgleichung stetig differenzierbar sind, die Nullstellen der Lösungen keinen Häufungspunkt besitzen können.

die Lösungen keine reelle Periode besitzen. Die Frage nach Lösungen durch zwei gegebene Punkte soll später behandelt werden. Jetzt wollen wir erst die Frage nach den allgemeinen Lösungen bei den übrigen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten weiter behandeln.

Die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + g\,y' + h\,y = 0$$

läßt sich mit demselben Ansatz $y = e^{rx}$ integrieren. Er führt auf die quadratische Gleichung

$$r^2 + g\,r + h = 0\,.$$

Wenn dieselbe zwei reelle verschiedene Lösungen r_1 und r_2 hat, so ist

$$y = c_1\,e^{r_1 x} + c_2\,e^{r_2 x}$$

die allgemeine Lösung. Wenn aber $g^2 - 4\,h < 0$ ist, so geht man im Interesse der Realität der Lösungen besser zu den trigonometrischen Funktionen über. Dann hat man in

$$y = e^{-\frac{g}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{4\,h - g^2}}{2}\,x + c_2 \sin\frac{\sqrt{4\,h - g^2}}{2}\,x\right)$$

die allgemeine Lösung.

Wenn aber $4\,h - g^2 = 0$ ist, so hat die quadratische Gleichung nur eine Wurzel und man bekommt nur eine Lösung der Differentialgleichung und hat also auch kein Fundamentalsystem. Man kann natürlich sofort verifizieren, daß in diesem Falle neben $e^{-\frac{g}{2}x}$ auch

$$x\,e^{-\frac{g}{2}x}$$

eine Lösung ist. Aber es ist wohl angemessener, einen systematischen Weg zu kennen, der zu dieser Lösung hinführt. Den gibt es in der Tat. *Die Kenntnis einer speziellen Lösung erlaubt es nämlich stets, eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine erster Ordnung zurückzuführen.* Ich will dies bei dieser Gelegenheit darlegen. Wenn nämlich y_1 eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \varphi_1(x)\,y' + \varphi_0(x)\,y = 0$$

ist, so hat man

$$y_1'' + \varphi_1(x)\,y_1' + \varphi_0(x)\,y_1 = 0.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen $\varphi_0(x)$, so findet man

$$y''\,y_1 - y_1''\,y + \varphi_1(x)\,(y'\,y_1 - y_1'\,y) = 0$$

oder

$$\varphi_1(x) = -\frac{d}{dx}\log(y'\,y_1 - y_1'\,y).$$

Also gilt für jedes Lösungspaar y, y_1

$$(F) \qquad y'\,y_1 - y\,y_1' = \gamma \cdot e^{-\int \varphi_1(x)\,dx},$$

wo unter γ eine geeignete Konstante verstanden ist. Das ist aber eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von $y(x)$.

Man kann die Zurückführung auf eine Gleichung erster Ordnung auch noch in anderer Weise bewerkstelligen. Man bezeichne wieder mit y_1 eine schon bekannte Lösung und gehe mit dem Ansatz

$$y = y_1 \cdot v$$

in die Differentialgleichung hinein. Dann findet man wieder

$$\underline{y_1''} v + 2 y_1' v' + y_1 v'' + \underline{\varphi_1 y_1'} v + \varphi_1 y_1 v' + \underline{\varphi_0 y_1} v = 0.$$

Da aber y_1 der Differentialgleichung genügt, so wird daraus

$$y_1 v'' + (2 y_1' + \varphi_1 y_1) v' = 0.$$

Setzt man noch $v' = u$, so hat man

$$u' + u\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \varphi_1\right) = 0$$

und

$$y = y_1 \cdot \int u\, dx.$$

Die Anwendung auf unser konkretes Beispiel konstanter Koeffizienten sei dem Leser überlassen. Doch sei bemerkt, daß man hier auch durch einen Grenzübergang zur anderen Lösung gelangen kann. Wenn nämlich die charakteristische Gleichung

$$r^2 + g r + h = 0$$

von

$$y'' + g y' + h y = 0$$

zwei verschiedene Lösungen etwa ϱ und $\varrho + h$ hat, so ist auch

$$\frac{e^{(\varrho+h)x} - e^{\varrho x}}{h}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Geht man aber zu $h \to 0$ über, so wird hieraus gerade

$$x e^{\varrho x} = x e^{-\frac{g}{2}x}.$$

Auch dies führt zu der neuen Lösung hin. Jetzt ist also

$$y = e^{-\frac{g}{2}x}(a + b x)$$

mit Konstanten a und b das allgemeine Integral.

Ich gehe nun zur *inhomogenen Gleichung* über. Es gibt eine auf beliebige lineare Gleichungen zweiter Ordnung anwendbare Methode, die *Variation der Konstanten*, welche stets die Integration der inhomogenen Gleichung erlaubt, wenn man ein Fundamentalsystem der homogenen kennt. Die Lösung der inhomogenen kann dann auf zwei Quadraturen zurückgeführt werden. Sei die Differentialgleichung etwa

$$y'' + \varphi_1(x) y' + \varphi_0(x) y = f(x)$$

und sei $y_1(x)$, $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung. Dann gehe ich mit dem Ansatz

$$y = c_1(x)\,y_1 + c_2(x)\,y_2$$

in die inhomogene Gleichung hinein. Diese wird dann

$$\begin{aligned} &c_1''\,y_1 + c_2''\,y_2 + 2\,c_1'\,y_1' + 2\,c_2'\,y_2' + \underline{c_1\,y_1'' + c_2\,y_2''} \\ &+ \varphi_1\,c_1'\,y_1 + \varphi_1\,c_2'\,y_2 + \underline{\varphi_1\,c_1\,y_1' + \varphi_1\,c_2\,y_2'} \\ &+ \underline{\varphi_0\,c_1\,y_1 + \varphi_0\,c_2\,y_2} = f(x). \end{aligned}$$

Die unterstrichenen Glieder ergeben zusammen natürlich Null. Dann fordere ich weiter

(1) $$c_1'\,y_1 + c_2'\,y_2 = 0.$$

Dann ist auch

$$c_1''\,y_1 + c_2''\,y_2 + c_1'\,y_1' + c_2'\,y_2' = 0$$

und so bleibt übrig

(2) $$c_1'\,y_1' + c_2'\,y_2' = f(x).$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt sich sofort

$$c_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x)\,y_2\,dx}{y_1'\,y_2 - y_2'\,y_1} + h_1,$$

$$c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x)\,y_1\,dx}{y_2'\,y_1 - y_1'\,y_2} + h_2.$$

So wird also

$$y = c_1(x)\,y_1 + c_2(x)\,y_2 + h_1\,y_1 + h_2\,y_2$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. h_1 und h_2 sind dabei die willkürlichen Konstanten.

Ein wichtiger Spezialfall möge noch besonders behandelt werden. Das ist die Gleichung

$$y'' + \lambda\,y = A\cos b\,x \qquad (\lambda,\ a,\ b \text{ sind konstant}).$$

Statt der Durchführung der eben dargelegten allgemeinen Methode erweist sich hier der Ansatz

$$y = \beta \cdot A\cos b\,x$$

mit konstantem β als zweckmäßiger. Er führt zu der Bedingungsgleichung

$$-\beta\,b^2 + \lambda\,\beta = 1$$

für β; so wird

$$y = \frac{A}{\lambda - b^2}\cos b\,x$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Man kann aber dann leicht alle angeben, wenn man nur beachtet, daß die Zufügung irgendeiner Lösung der homogenen Gleichung stets eine neue Lösung der

inhomogenen Gleichung liefert und daß die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung stets eine Lösung der homogenen ergibt. Daher ist

$$y = \frac{A}{\lambda - b^2} \cos b x + h_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + h_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

das allgemeine Integral unserer Gleichung. Dies Verfahren versagt nur, wenn $\lambda = b^2$ wird. Aber man kann dann durch Grenzübergang leicht eine Lösung der inhomogenen Gleichung finden. Jedenfalls ist nämlich stets

$$\frac{A}{b + \sqrt{\lambda}} \frac{\cos b x - \cos \sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda} - b}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung, solange noch $\sqrt{\lambda} \neq b$ ist. Macht man aber hier den Grenzübergang $b \to \sqrt{\lambda}$, so erhält man

$$\frac{A}{2\sqrt{\lambda}} x \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

und das ist ersichtlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + \lambda y = A \cos \sqrt{\lambda}\, x .$$

Nahe verwandt mit den Gleichungen mit konstanten Koeffizienten sind die Gleichungen

$$y'' + \frac{g}{x} y' + \frac{h}{x^2} y = 0 .$$

g und h sind dabei wieder konstant. Man kann sie übrigens durch die Substitution

$$x = e^t$$

auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Darin liegt schon, daß der Ansatz

$$y = x^\varrho$$

zum Ziel führen muß. Er führt ja in der Tat auf die Bedingungsgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + g\varrho + h = 0 .$$

Hat dieselbe zwei gleiche Wurzeln, so sind

$$y_1 = x^{\frac{1-g}{2}} \quad \text{und} \quad y_2 = x^{\frac{1-g}{2}} \log x$$

Lösungen, die ein Fundamentalsystem bilden.

Bemerkung. Wir hatten auf S. 24 die *Riccati*sche Gleichung (1) der S. 23 durch die Substitution (3) in die lineare Gleichung (4) übergeführt. Durch diese Substitution wird nun auch aus dem allgemeinen Integral der einen das allgemeine Integral der anderen, wobei noch ein konstanter Faktor der Lösungen der linearen unerheblich bleibt. Wenn nun u_1 und u_2 zwei Lösungen von (4) sind, welche durch die Anfangsbedingungen $u_1(x_0) = 0$, $u_1'(x_0) = 1$, $u_2(x_0) = 1$, $u_2'(x_0) = 0$ festgelegt sein mögen, so ist somit

$$y = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{c_1 u_1' + c_2 u_2'}{c_1 u_1 + c_2 u_2}$$

das allgemeine Integral der *Riccati*schen Gleichung. Insbesondere ist also

$$y = -\frac{1}{\alpha_2}\,\frac{-y_0\,\alpha_2(x_0)\,u_1' + u_2'}{-y_0\,\alpha_2(x_0)\,u_1 + u_2}$$

dasjenige Integral, welches bei x_0 den Wert y_0 hat. Es hängt also linear von der willkürlichen Konstanten ab. Das bedeutet geometrisch, daß das Doppelverhältnis von irgend vier Lösungen konstant ist.

3. Kapitel.

Diskussion des Verlaufes der Integralkurven.

§ 1. Geschlossene Integralkurven.

Nächst den Gleichungen erster Ordnung, deren Lösungen wir in ihrem qualitativen Verlauf ausführlich betrachtet haben, sind die Gleichungen zweiter Ordnung Gegenstand vielfältiger Untersuchung gewesen. Es handelt sich dabei einerseits um lineare Differentialgleichungen, die wir in den nächsten Paragraphen ausführlich behandeln wollen. Andererseits sind die Lösungen gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen eingehend durchforscht. Ich will hier im Anschluß an eine Arbeit von *Birkhoff*[1]) mehr referierend als beweisend das Wesentlichste herausheben. Die Gleichungen, welche wir betrachten wollen, sind von relativ spezieller Gestalt. Es sollen die *Euler*schen Gleichungen gewisser definiter Variationsprobleme sein. Die Aufgabe, Kurven so zu bestimmen, daß das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,dt \tag{1}$$

möglichst klein wird, führt auf die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \tag{2}$$

die man die *Euler*schen Gleichungen des Variationsproblemes nennt. Die Funktion F sei samt ihren ersten und zweiten Ableitungen in einem gewissen Bereiche stetig.

Daß die gesuchten Kurven den beiden Differentialgleichungen genügen müssen, sieht man nach den Regeln der Variationsrechnung leicht so ein:

Es sei $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine Kurve, welche die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verbindet; x und y seien zweimal stetig differenzierbar; t_0 und t_1 sollen die entsprechenden Werte des Parameters t sein. $x = x(t) + \varepsilon\,\eta_1(t)$, $y = y(t) + \varepsilon\,\eta_2(t)$ stelle eine benachbarte Kurve dar, welche dieselben Punkte verbindet, es sei also

[1]) Dynamical systems with two degrees of freedom. Transactions of the Am. math. soc. **18**, 199—300. 1917.

$\eta_1(t_0) = \eta_1(t_1) = \eta_2(t_0) = \eta_2(t_1) = 0$; die η_1 und η_2 seien stetig differenzierbar; ε sei ein Parameter. Für diese Kurve wird das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x + \varepsilon\eta_1, y + \varepsilon\eta_2, x' + \varepsilon\eta_1', y' + \varepsilon\eta_2')\, dt,$$

und diese Funktion von ε soll für $\varepsilon = 0$ ein Minimum besitzen. Daher muß die Ableitung nach ε für $\varepsilon = 0$ verschwinden. Differentiation aber liefert

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{\eta_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \eta_1' \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial y} + \eta_2' \frac{\partial F}{\partial y'}\right\} dt.$$

Durch partielle Integration kann man dies Integral auf die folgende Form bringen:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\eta_1 \left\{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right\} + \eta_2 \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\right] dt.$$

Die ausintegrierten Bestandteile fallen dabei weg, weil η_1 und η_2 am Anfang und Ende des Intervalles verschwinden sollen. Soll nun aber dieses Integral bei beliebiger Wahl der Funktionen η_1 und η_2 verschwinden, so müssen, wie man leicht nachweist, die beiden Klammern Null sein. Das sind aber gerade die linken Seiten der beiden *Euler*schen Differentialgleichungen. Wegen genauerer Begründung dieses letzten Schlusses muß auf die Lehrbücher der Variationsrechnung verwiesen werden, wenn es der Leser nicht vorziehen sollte, den einfachen Beweis sich selbst zurechtzulegen.

Einem Leser, welcher dieser Betrachtung aufmerksam gefolgt ist, wird sich die Bemerkung schon aufgedrängt haben, daß den beiden Differentialgleichungen (2) nicht nur diejenigen Kurven genügen, welche dem Integral (1) einen kleineren Wert erteilen, als alle genügend benachbarten Kurven, sondern auch die, für welche es größer wird als für die Nachbarkurven, sowie überhaupt alle die Kurven, für welche es einen stationären Wert bekommt, d. h. für welche jene Ableitung nach ε für $\varepsilon = 0$ und beliebige η_1 und η_2 verschwindet. Wegen dieses Sachverhaltes nennt man auch die Lösungen von (2) mit einem etwas neutralen Namen: *Extremalen*.

Die Frage, deren Lösung das Weitere gewidmet ist, ist nun die nach den *geschlossenen Extremalen*. Für die Methoden, die wir einschlagen, ist die Heranziehung des Variationsproblemes charakteristisch. Wir erhalten damit zugleich eine Probe für das Eingreifen der Variationsrechnung in die Theorie der Differentialgleichungen. Das sind Dinge, die sich leicht noch viel weiter verfolgen ließen, und ein anderes Buch dieser Sammlung wird noch mehr die Bedeutung dieses Ansatzes hervorheben. Die Schwierigkeiten, auf die sich hier die Methode wird einstellen müssen, liegen darin, daß die Art des

Minimums noch recht verschieden sein kann. D. h. die Menge der Kurven, innerhalb deren die geschlossene Extremale ein Extrem liefert, kann recht verschieden sein. Z. B. kleinerer Integralwert als *alle* genügend benachbarten Kurven, oder nur kleinerer Wert als *gewisse* genügend benachbarte Kurven oder auch nur überhaupt stationärer Charakter. Man muß nur an die analogen Verhältnisse bei den Maxima und Minima der Funktionen einer oder zweier Veränderlichen denken, um sich klar zu machen, daß es auch Extremalen geben wird, die gar keine Minimaleigenschaften besitzen. Sie werden den Sattelpunkten der Flächen entsprechen.

Birkhoffs Verdienst gegenüber seinen Vorgängern ist es, alle diese verschiedenen Vorkommnisse ausgenutzt zu haben. Er hat allen diesen Möglichkeiten durch besondere Methoden Rechnung getragen. Wir wollen im Folgenden darzustellen versuchen, welche Gedanken da ausschlaggebend sind.

Die Beweismethoden stützen sich namentlich auf einen bestimmten Satz der Variationsrechnung, den wir nun zuerst angeben wollen und dessen Heranziehung die Beschränkung auf Variationsprobleme bestimmter Art, nämlich auf die sogenannten positiv definiten Variationsprobleme erfordert.

Zunächst sei daran erinnert, daß jedenfalls $F(x, y, x', y')$ eine positiv homogene Funktion von x' und y' von der Ordnung Eins sein muß, d. h. es muß $F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y')$ sein für $k > 0$. Der Sinn dieser Voraussetzung ist der: Unabhängigkeit des Integrales von der Wahl des Parameters t.

Das Variationsproblem heißt definit, wenn in dem zugrundegelegten Bereich der x, y für beliebige x' und y' die Funktion $F_1(x, y, x', y')$ von einerlei Vorzeichen ist. Dabei kann F_1 durch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = x'^2 F_1$$

definiert werden. Im Falle des Minimums muß namentlich $F_1 > 0$ sein, und das wollen wir weiter voraussetzen. Diese Voraussetzungen sind z. B. für $F \equiv \sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2} + \alpha x' + \beta y'$ erfüllt, wenn man $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ voraussetzt. Zu unserem Problem gehört also für $\alpha = \beta = 0$ namentlich das der geodätischen Linien auf einer Fläche, deren Linienelement durch $s'^2 = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$ erklärt ist. Der Satz der Variationsrechnung lautet nun so: Wenn die Funktion F mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in einem Bereich B der x, y, für beliebige x', y' stetig ist, wenn $F_1 > 0$ ist, so kann man jedem inneren abgeschlossenen Teilbereich eine Zahl R zuordnen, derart, daß man jeden Punkt desselben mit jedem anderen, der von ihm um nicht mehr als R entfernt ist, durch einen Extremalenbogen verbinden kann, der ganz im Kreis vom Radius R um den Ausgangs-

punkt verläuft und der dem Integral (1) einen kleineren Wert erteilt, als jede andere im Kreis verlaufende, die beiden Punkte verbindende abteilungsweise stetig differenzierbare Kurve. Setzt man, wie es von nun an geschehen soll, weiter voraus, daß $F > 0$ sei, für alle x, y des Bereiches und beliebige x', y', so ist der Integralwert sogar kleiner als der zu irgendeiner anderen im Teilbereich verlaufenden, die beiden Punkte verbindenden Kurve gehörige Integralwert. Ein allen aufgezählten Voraussetzungen genügendes Variationsproblem heißt positiv und positiv definit[1]). Beim erwähnten Problem der geodätischen Linien sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Die Problemstellung selbst ist uns auch bei den Gleichungen erster Ordnung nicht fremd gewesen. Man rufe sich nur den Satz von S. 61 ins Gedächtnis zurück. Er behauptet unmittelbar die Existenz von geschlossenen Integralkurven in Bereichen folgender Beschaffenheit: Legt man durch einen Punkt des Bereiches eine Integralkurve, so verläßt sie in ihrem weiteren Verlauf den Bereich nicht und mündet auch nicht in einem singulären Punkt.

Hier wollen wir *Bereiche* heranziehen, die in folgenden Sinne *konvex* sind: *Verbindet man zwei genügend nahe beieinander gelegene Punkte des Bereiches durch eine Extremale, so gehört dieser Extremalenbogen vollständig dem Bereich an.* Konvex in diesem Sinne wird also z. B. eine geschlossene Fläche sein, und wenn wir weiterhin beweisen, daß es in einem konvexen Bereich geschlossene Extremalen gibt, so liegt darin insbesondere der Satz begründet, daß es auf geschlossenen Flächen geschlossene geodätische Linien gibt.

Zunächst suchen wir geschlossene Extremalen vom Minimaltypus, die also einen kleineren Integralwert liefern sollen als *alle* benachbarten Kurven. Da gilt folgender Satz:

Vorgelegt ist ein konvexer Bereich[2]) *G. In seinem Inneren liegt eine geschlossene rektifizierbare Kurve* $\mathfrak{C}$, *für welche* $J \leqq J_0$ *ist bei passender Wahl von* J_0. $\mathfrak{C}$ *soll nicht unter Festhaltung von* $J \leqq J_0$ *innerhalb G auf einen Punkt stetig zusammengezogen werden können. Dann kann* $\mathfrak{C}$ *stetig in eine geschlossene Extremale deformiert werden, für welche auch* $J \leqq J_0$ *ist und die vom Minimaltypus ist, entweder in bezug auf alle genügend benachbarten Kurven, oder doch wenigstens in bezug auf die ihr auf einer ihrer beiden Seiten genügend benachbarten Kurven. In diesem letzteren Falle ist sie eine Randkurve des Bereiches.*

---

[1]) Wegen des Beweises sei z. B. auf *Bolza:* Variationsrechnung, S. 274 ff. verwiesen.

[2]) Statt dessen genügt es auch, vorauszusetzen, daß man an diejenigen Randkurven, die nicht konvex sind, mit Kurven, deren $J \leqq J_0$ ist, nicht beliebig nahe herankommen kann.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einer von *Signorini* (Palermo Rendiconti 33 (1912)) zuerst verwendeten sinnreichen Methode. Durch sie wird das Problem auf eines der gewöhnlichen Minima zurückgeführt.

Wir gehen zunächst von der in G gegebenen Kurve $\mathfrak{C}$ zu einem aus Extremalenbogen gebildeten Polygon über. Dazu teilen wir $\mathfrak{C}$ in n Teilbogen ein, derart, daß längs eines jeden derselben das Integral einen Wert bekommt kleiner oder gleich[1]) $\frac{J_0}{n}$ und derart, daß man Anfang und Ende eines jeden Bogens auf Grund des gerade erwähnten Satzes durch je einen Extremalenbogen verbinden kann. n sei überdies so groß gewählt, daß irgend zwei Punkte des Bereiches sich auf Grund des angeführten Satzes aus der Variationsrechnung durch einen Extremalenbogen verbinden lassen. Das aus diesen Extremalenbogen gebildete Polygon $\mathfrak{C}'$ — das nicht frei von Selbstüberschneidungen zu sein braucht — erteilt dem Integral auch einen Wert kleiner oder gleich J_0. Ferner kann man das Polygon $\mathfrak{C}'$ durch stetige Deformation aus $\mathfrak{C}$ herstellen. Um das einzusehen, betrachte man einen einzelnen der n Bogen von $\mathfrak{C}$. Man lasse einen Punkt P diesen Bogen durchlaufen und betrachte dabei ständig den Extremalenbogen, welcher vom Ausgangspunkt zu P hinreicht. Dieser ändert sich stetig mit P. Und so geht der Extremalenbogen durch stetige Abänderung aus dem entsprechenden Bogen von $\mathfrak{C}$ hervor. Nunmehr betrachte man in G irgendwelche n Punkte P_i folgender Art. Je zwei aufeinanderfolgende sollen um weniger als eine Zahl ϱ voneinander entfernt sein. Diese sei kleiner als die S. 126 erklärte Zahl R, so daß also beide Punkte durch einen Extremalenbogen verbindbar sind. Weiter aber sei ϱ so klein gewählt, daß der zugehörige Integralwert kleiner als $\frac{J_0}{n}$ ist.

Der Integralwert des so durch $P_1 \dots P_n$ bestimmten Polygons werde als Funktion der P_i mit $J(P_1 \dots P_n)$ bezeichnet. Dies ist dann eine stetige Funktion der P_i, die in einem gewissen Bereich eines $2n$-dimensionalen Raumes der Koordinaten (x_i, y_i) der P_i erklärt ist und in diesem Bereiche nur Werte unter J_0 annimmt. Dieser Bereich kann aus mehreren getrennten Stücken bestehen; wir betrachten denjenigen zusammenhängenden Teilbereich, dem der repräsentierende Punkt des zuerst erhaltenen Polygones $\mathfrak{C}'$ angehört. In einem gewissen Punkt $\mathfrak{P}$ dieses Bereiches besitzt $J(P_1 \dots P_n)$ sein absolutes Minimum in bezug auf diesen Bereich. Diesem Punkt entspricht eine Kurve, welche durch stetige Abänderung aus $\mathfrak{C}'$ gewonnen werden

[1]) Dazu geht man auf der Kurve von einem beliebig gewählten ersten Teilpunkt so lange weiter, bis der Integralwert gerade gleich $\frac{J_0}{n}$ geworden ist. Hier legt man den zweiten Teilpunkt hin usw.

kann. Denn man kann ja im P_i-Bereich den Minimumspunkt $\mathfrak{E}$ mit dem Ausgangspunkte $\mathfrak{E}'$ verbinden. Jedem Punkt der Verbindungslinie entspricht ein Extremalenpolygon, und diese ändern sich stetig mit dem repräsentierenden Punkt. Nun aber muß das dem absoluten Minimum entsprechende Polygon $\mathfrak{E}$ eine einzelne geschlossene Extremale sein. Ich nehme zum Beweise an[1]), es käme eine Ecke vor. Sie möge bei P_2 liegen. Die Bogen $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ bilden die Ecke. Das über beide erstreckte Integral ist höchstens gleich $2\frac{J_0}{n}$. Nehme ich auf jedem der beiden Bogen in hinreichender Nähe der Ecke P_2 einen Punkt P_1' und P_3' an, so kann man beide sicher durch einen einzigen Extremalenbogen verbinden, über den das Integral einen kleineren Wert bekommt als über $P_1' P_2 P_3'$. Also ist auch das über $P_1 P_1' P_3' P_3$ erstreckte Integral kleiner als $\frac{2J_0}{n}$. Daher kann man auf dem Bogen $P_1' P_3'$ einen Punkt P_2' so bestimmen, daß sowohl das Integral über $P_1 P_1' P_2'$ wie das Integral über $P'_2 P'_3 P_3$ kleiner sind als $\frac{J_0}{n}$. Daher kann man nun P'_2 sowohl mit P_1 wie mit P_3 durch je einen Extremalenbogen verbinden; für beide wird das Integral kleiner als $\frac{J_0}{n}$. Über $P_1 P'_2 P_3$ wird überdies das Integral kleiner als über $P_1 P_1' P_3' P_3$ und dies war kleiner als das über $P_1 P_2 P_3$. Ersetzt man also die Ecke P_2 durch P_2' so erhält man ein neues Polygon, das ein *kleineres* Integral liefert. Das widerspricht der Minimaleigenschaft des Polygons $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Also besteht unser Extremalenpolygon aus einer einzigen geschlossenen Extremalen. Sie kann im Inneren oder auch im Rand des Bereiches verlaufen. A priori wäre es aber auch denkbar, daß sie nur einzelne Punkte mit dem Rande gemeinsam hat. Dies kann aber noch durch besondere hier nicht durchzuführende Betrachtungen als unmöglich erkannt werden. Ebensowenig will ich hier des näheren ausführen, daß die geschlossene Extremale einen Integralwert liefert, der von keiner ihr im Bereiche genügend benachbarten Kurve unterschritten werden kann.

Als Anwendung des so bewiesenen Satzes ergibt sich z. B. folgendes: Auf jeder geschlossenen Fläche, deren Geschlecht mindestens Eins ist, gibt es geschlossene geodätische Linien in unendlicher Anzahl Denn man überzeugt sich leicht, daß es unendlich viele geschlossene Kurven von topologisch verschiedenem Typus gibt, d. h. Kurven, die sich nicht auf der Fläche ineinander deformieren lassen.

Unser bewiesener Satz behauptet ganz und gar nicht, daß jeder mehrfach zusammenhängende konvexe Bereich geschlossene allerkürzeste Extremalen in seinem *Inneren* enthält. Tatsächlich gilt auch

[1]) Ich verdanke die nun folgende Schlußweise Herrn stud. math. R. Brauer.

ein solcher Satz nicht, wie man an dem Beispiel eines zweifach zusammenhängenden Stückes einer passend gewählten Rotationsfläche sehen kann. Dieselbe möge dadurch entstehen, daß man das über $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$ gelegene Stück der Kurve $y = \sin x$ um die sie nicht treffende Gerade $y = -2$ rotieren läßt. Das zweifach zusammenhängende Stück ist von zwei aufeinanderfolgenden Kehlkreisen begrenzt. Alle dem Flächenstück angehörigen Kurven sind länger als diese Kehlkreise. Diese Kurven des absoluten Minimums liegen also nicht im Bereichinneren. Gleichwohl befinden sich in dem Bereich geschlossene Extremalen, nämlich der Kreis der weitesten Ausbuchtung. Unsere Methode liefert also keine Handhabe, die Existenz derselben zu erkennen. Darin liegt schon eine Andeutung für die Tragweite der Methode. Man kann darüber mit *Birkhoff* noch eingehendere Erörterungen anstellen. Jedenfalls wird es nötig, andere Methoden auszudenken, mit welchen man auch die anderen Sorten von geschlossenen Extremalen gewinnen kann. Andere, d. h. solche, die nicht einen kleineren Integralwert liefern als alle genügend benachbarten Kurven.

Zunächst führen wir die von *Birkhoff* im Unterschied zu der eben besprochenen *Minimum*methode als *Minimax*methode ersonnene ein. Dieses Minimaxprinzip geht von der Tatsache aus, daß die ersten Ableitungen einer Funktion auch in einem Punkte verschwinden, an den zwei oder mehr sonst getrennte Bereiche anstoßen, in welchen die Funktion kleiner ist als in dem Punkt selbst. Solche Punkte sollen Minimaxpunkte heißen. Die um Eins verminderte Zahl der eben erwähnten anstoßenden Bereiche ist die Vielfachheit, mit der im nachfolgenden Minimaxprinzip jeder Minimaxpunkt in Ansatz zu bringen ist. Über ihre Existenz gilt folgendes

Minimaxprinzip: *Eine Funktion J sei in einem abgeschlossenen Bereich B des n-dimensionalen Raumes eindeutig und analytisch. Sie besitze in diesem Bereiche l Minima bei $P_1, P_2, \ldots, P_l$. Keine zwei dieser Punkte sollen durch Kurven verbindbar sein, auf welchen J konstant ist. Jedesmal dann, wenn es möglich ist, zwei dieser Punkte (P_i, P_k) in B durch eine Kurve zu verbinden, längs deren für irgendein festgewähltes J_0: $J \leqq J_0$ ist, soll es möglich sein, dieselbe stetig in eine andere* ***im Inneren*** *von B gelegene zu deformieren, welche auch P_i und P_k verbindet und längs deren auch $J \leqq J_0$ ist. Ist dann der Bereich m-fach zusammenhängend*[1]*, so gibt es in demselben mindestens $m + l - 1$ Minimaxpunkte.*

Ich will nun nicht zu weit in die Begriffsbildungen der Analysis situs hineingehen. Sie ist ein Sorgenkind der modernen Mathematik, auf dem aber gleichwohl große Hoffnungen ruhen. Sie wird, wenn

[1]) Dieser Begriff wird gleich erklärt werden.

nicht alles trügt, noch einmal zu den grundlegenden Kapiteln der Analysis zählen. Ein Beleg dafür werden gerade auch die in diesem Paragraphen weiter anzustellenden Betrachtungen sein. Sie werden zeigen, wie unsere Fragestellung mit Notwendigkeit auf die Verwendung der Analysis situs hindrängt. So werden die Ergebnisse der Analysis situs von Jahr zu Jahr wichtiger für die Analysis. Ich will nur erklären, wann der Zusammenhang einer Mannigfaltigkeit mindestens m heißen soll. Das soll dann der Fall sein, wenn es in der Mannigfaltigkeit m geschlossene Kurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, ..., $\mathfrak{C}_m$ gibt, die voneinander linear unabhängig sind. Dabei wird die lineare Abhängigkeit so erklärt: Zunächst sind für die Betrachtungen der Analysis situs zwei Kurven gleichwertig oder, wie man sagt, homolog, wenn man sie durch stetige Deformation innerhalb der Mannigfaltigkeit ineinander überführen kann. Eine Kurve heißt insbesondere homolog Null, wenn man sie in der Mannigfaltigkeit auf einen Punkt zusammenziehen kann. So ist z. B. ein Großkreis auf einer Kugel homolog Null. Aber die Meridiankurve eines Ringwulstes, wie er durch Rotation eines Kreises um eine ihn nicht treffende Gerade seiner Ebene entsteht, ist nicht homolog Null auf der Ringfläche.

Weiter setzt es nun die lineare Unabhängigkeit der Kurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, ..., $\mathfrak{C}_m$ voraus, daß keine derselben homolog Null sein soll. Ferner sollen keine zwei derselben einander homolog sein. Es soll aber endlich auch keine lineare Verbindung jener Kurven homolog Null sein. Eine lineare Verbindung von Kurven ist wieder eine geschlossene Kurve, die man etwa so erhalten kann: Man durchlaufe z. B. erst $\mathfrak{C}_1$ von einem seiner Punkte P aus, bis nach P zurück und gehe dann von da aus auf einer mit $\mathfrak{C}_2$ homologen Kurve weiter[1]). Dabei schadet es nichts, wenn sie außer in P die erste auch noch in anderen Punkten trifft. Man gelangt so wieder zu P zurück und kann dann auf einer anderen mit $\mathfrak{C}_3$ homologen Kurve weitergehen oder auch erst noch eine weitere mit $\mathfrak{C}_2$ homologe Kurve durchlaufen usw. Auf diese Weise kann man natürlich auch geschlossene Kurven erhalten, welche homolog Null sind. Man braucht ja nur etwa eine geschlossene Kurve dadurch herzustellen, daß man $\mathfrak{C}_1$ erst in einem Sinne und eine damit homologe gleich hinterher im anderen Sinne durchläuft. Diese auf $\mathfrak{C}_1$ fallende, aber umgekehrt durchlaufene Kurve werde mit $\mathfrak{C}_1^{-1}$ bezeichnet. Unter

$$\mathfrak{C}_{a_1}^{\varepsilon_1} \cdot \mathfrak{C}_{a_2}^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \quad (\varepsilon_i = \pm 1)^2)$$

versteht man eine Kurve, die man erhält, wenn man nacheinander

[1]) Eine solche gibt es, weil man doch offenbar jede Kurve durch stetige Deformation auf der Fläche in eine andere überführen kann, die einen gegebenen Punkt enthält.

[2]) Dabei schreiben wir statt $\mathfrak{C}$ auch $\mathfrak{C}^1$.

$\mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}$, $\mathfrak{C}_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}$ usw. durchläuft. $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_m$ heißen dann linear abhängig, wenn eine geeignete Zusammensetzung

$$\mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \cdot \mathfrak{C}_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \cdot \ldots$$

auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Dabei dürfen nie $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{C}_i^{-1}$ nebeneinander stehen.

Nach dieser Definition ist die Oberfläche einer Kugel von nullfachem Zusammenhang. Denn eine *jede* geschlossene Kurve ist homolog Null. Die Oberfläche des vorhin erwähnten Ringwulstes ist mindestens einfach zusammenhängend. Denn auf ihr gibt es geschlossene Kurven, die nicht homolog Null sind.

Nach diesen Erklärungen kann nun das Minimaxprinzip durch die folgenden Überlegungen bewiesen werden. Die Werte von J in den einzelnen Minimumspunkten seien der Größe nach geordnet $J_1 \leqq J_2 \leqq \cdots \leqq J_l$. Punkte mit $J < J_1$ gibt es also überhaupt nicht. Ist aber J' eine Zahl größer als J_1, so gibt es Punkte der Mannigfaltigkeit, in welchem $J < J'$ ist. Ist insbesondere J' nur wenig größer als J_1, so werden diese Punkte eine gewisse Umgebung von P_1 ausmachen oder sie werden Umgebungen mehrerer Punkte ausmachen, falls in mehreren verschiedenen der Punkte $P_1, \ldots, P_l$ das absolute Minimum angenommen wird.

Diese Umgebungen müssen nicht aus der allernächsten Umgebung einzelner Punkte bestehen, weil ja z. B. J längs eines ganzen Kurvenbogens seinem absoluten Mimimum gleich sein kann. Aber jedenfalls kommen für Werte J', die genügend nahe an J_1 liegen, so viele getrennte Umgebungen heraus, als es Punkte P_i gibt, in welchen J das absolute Minimum annimmt. Denn wir haben angenommen, daß keine zwei derselben durch eine Kurve verbindbar sind, auf welcher J konstant ist. In dem Augenblick, wo dann J' über den nächst kleineren Wert der sukzessiven Minima: J_2 hinauswächst, treten neue von den seitherigen zunächst getrennte Umgebungen auf. Da aber für große J' schließlich die Umgebungen den ganzen Bereich ausfüllen, so müssen Verschmelzungen der verschiedenen Umgebungen irgendwann vorkommen. Es soll nun festgestellt werden, daß diese Verschmelzungen gerade in den Minimaxpunkten erfolgen. Dies ist ohne weiteres einzusehen, wenn die Verschmelzung zweier Umgebungen im Inneren des Bereiches erfolgt. Denn wenn die beiden Umgebungen zusammenkommen, so geschieht dies in Punkten, an die zwei verschiedene Bereiche anstoßen, in welchen J kleiner ist als in dem Verschmelzungspunkt selbst. Es ist aber weiter leicht festzustellen, daß stets Verschmelzungen im Inneren von B auftreten müssen. Denn nehmen wir an, die Umgebungen der Punkte P_i und P_k verschmölzen in einem Randpunkt, in welchem $J = J''$ sei. Dann kann man P_i und P_k über diesen Punkt hin miteinander durch eine Kurve

verbinden, auf der $J \leqq J''$ ist. Nach unseren Voraussetzungen kann man diese aber stetig in eine andere ganz in B gelegene deformieren, die auch P_i und P_k verbindet und längs der auch $J \leqq J''$ ist. Daher muß es auch einen Verschmelzungspunkt beider Umgebungen im Inneren von B geben. Nun bleibt noch abzuzählen, wieviele solche Verschmelzungspunkte mit Sicherheit auftreten müssen. Da alle Umgebungen verschmelzen müssen, so müssen mindestens $l-1$ Verschmelzungen auftreten. Ferner aber müssen noch gewisse weitere Verschmelzungen auftreten, um zu bewerkstelligen, daß der durch die Verschmelzungen entstehende Teilbereich von B den gleichen Zusammenhang wie dieser bekommt. Dazu sind mindestens weitere m Verschmelzungen nötig, wie man sich leicht klarmachen kann. So kommt die angegebene Mindestzahl $m+l-1$ der Minimaxpunkte heraus. Man kann sich überzeugen, daß dabei die vorhin eingeführte Vielfachheit der Minimaxpunkte in gehöriger Weise berücksichtigt ist.

Die Verwertung des Minimaxprinzips für die uns beschäftigenden Probleme will ich an einer bestimmten Frage darlegen, nämlich dem Problem, *ob es auf einer beliebigen geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null geschlossene geodätische Linien gibt.* Vom Geschlecht Null ist dabei eine Fläche, welche vom Typus der Kugel ist, die also durch jede ihrer geschlossenen Kurven in zwei Kalotten zerlegt wird. Bei diesem Problem leistet offenbar die früher benutzte Minimummethode nichts. Aus dem S. 127 aufgestellten Satz folgt nichts über die Existenz geschlossener geodätischer Linien. Das Minimaxprinzip aber führt nun zu dem folgenden Satz: *Weiß man, daß auf der geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null l geschlossene Extremalen vom Minimumtypus liegen, so folgt daraus die Existenz von mindestens $l+1$ weiteren vom Minimaxtypus.* Aus diesem Satz folgt also namentlich für $l=0$ die Existenz mindestens einer geschlossenen geodätischen Linie auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null.

Der Beweis stützt sich auf den folgenden, einleuchtenden, hier nicht näher zu begründenden Satz aus der Analysis situs[1]). Wir betrachten eine Schar von geschlossenen Jordankurven auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null. Die Kurven sollen stetig von einem Parameter t abhängen. Sie sollen sich für $t \to 0$ auf einen Punkt P der Fläche und für $t \to 1$ auf einen anderen von P verschiedenen Punkt Q der Fläche zusammenziehen. Andere „Nullkurven" als diese beiden sollen in der Schar nicht vorkommen. Nun betrachte man zunächst eine Kurvenschar S, in der sich nie zwei verschiedene

[1]) Herrn von Kerékjártó verdanke ich die folgende Bemerkung: Der erste Teil des Satzes ergibt sich aus S. 71/72 von Gött. Nachr. 1922 (Kerékjártó: Über Kurvenscharen auf Flächen). Der zweite Teil des Satzes folgt aus dem Brouwerschen Satze über die Invarianz des Abbildungsgrades bei stetigen Deformationen (Math. Ann. Bd. 71, S. 105).

Kurven treffen. Dann gehört zu jedem Punkt R der Fläche mindestens ein Parameterwert t derart, daß die diesem Parameterwert entsprechende Kurve durch den Flächenpunkt hindurchgeht. Diese Behauptung bleibt aber auch für jede stetig von einem Parameter abhängende Schar richtig, die aus einer Schar S durch stetige Abänderung hervorgeht. Auch eine solche Schar kann nicht aus lauter Nullkurven bestehen.

Betrachten wir also irgendeine solche Kurvenschar. Das Integral J unseres Variationsproblemes wird längs einer jeden Kurve der Schar einen bestimmten Wert haben, der stetig von dem Parameter t abhängt. J' sei das Maximum dieser Funktion von t. Dann bestimme man die Zahl n so groß, daß irgend zwei Punkte der Fläche, deren Entfernung kleiner ist als die in dem Satz von S. 126/127 vorkommende Zahl R, durch einen Extremalenbogen verbunden werden können, dessen zugehöriger Integralwert nicht größer ist als $\frac{J'}{n}$. Somit kann man durch stetige Abänderung aus jeder Kurve der Schar ein Polygon aus höchstens n Extremalenbogen herstellen. Diese Polygone hängen wieder stetig vom Parameter t ab und ziehen sich für $t \to 0$ auf den Punkt P für $t \to 1$ auf den Punkt Q zusammen. Die Koordinaten (x_i, y_i) der n Ecken P_i eines solchen Polygons deuten wir wieder als Koordinaten in einem $2n$-dimensionalen Raume. Jedem Punkte eines gewissen Bereiches D desselben entspricht dann ein Polygon, und jeder Schar von Polygonen, die in der beschriebenen Weise sich aus einem Punkt P entwickelt und auf einem Punkt Q zusammenzieht, entspricht eine Kurve jenes Bereiches. Insbesondere entspricht den Nullkurven, d. h. den in einen einzigen Punkt ausgearteten Kurven, eine gewisse zweidimensionale geschlossene Fläche, die in umkehrbar eindeutiger stetiger Beziehung zu den Punkten unserer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null steht.

Die erwähnten, den Polygonscharen entsprechenden, Kurven verbinden zwei Punkte dieser zweidimensionalen Fläche miteinander, können aber nicht durch stetige Abänderung ganz in diese Fläche hineingebracht werden. Denn diese stetige Abänderung bedeutet eine stetige Abänderung der Polygonschar; einer Kurve in jener zweidimensionalen Fläche aber würde keine Polygonschar entsprechen, sondern eine Schar von Nullkurven, die ersichtlich nach unserem Satz nicht als Grenzlage einer Polygonschar herauskommen kann. Daher kann der Bereich des $2n$-dimensionalen Raumes nicht nullfach linear zusammenhängend sein. Die Zahl m des Minimaxprinzips ist also mindestens Eins. Ferner aber haben wir mindestens einen Punkt in unserem $2n$-dimensionalen Raume, in welchem J ein Minimum hat, das sind die den Nullkurven entsprechenden Punkte $(J = 0)$. Dazu kommen die l nach Voraussetzung vorhandenen geschlossenen Extremalen vom Minimumtypus. Daher liefert das Minimaxprinzip mindestens

$1+1+l-1=l+1$ geschlossene Extremalenpolygone vom Minimaxtypus[1]).

Daß dies Polygon wieder aus einer einzigen geschlossenen Extremalen besteht, kann man für alle Variationsprobleme beweisen, welche noch eine weitere jetzt neu vorauszusetzende Eigenschaft besitzen. Sie ist bei dem Problem der geodätischen Linien, das uns gerade beschäftigt, erfüllt. Sie soll darin bestehen, daß keine diskontinuierlichen, d. h. mit Ecken versehene Lösungen vorkommen. In der Variationsrechnung wird gelehrt, daß diese Bedingungen damit gleichbedeutend sind, daß in keinem Punkt $\frac{\partial F}{\partial x'}$ oder $\frac{\partial F}{\partial y'}$ für verschiedene Wertepaare (x', y') gleiche Werte bekommen. Nimmt man nun an, das Minimaxpolygon habe eine Ecke P_1, so denke man sich dieselbe auf einer beliebigen von einem Parameter τ abhängigen Kurve $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ verschiebbar. $\tau = 0$ entspreche der Minimaxlage von P_1. Das Integral J wird dann eine Funktion $J(\tau)$, deren Ableitung nach τ wegen der Minimaxeigenschaft bei $\tau = 0$ verschwindet. Diese Ableitung wird aber[2]) $\dot{x}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_2\right] + \dot{y}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_2\right]$. Dabei sind $\dot{x}$, $\dot{y}$ die Ableitungen von $x(\tau)$, $y(\tau)$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_1$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_2$ sind die Werte von $\frac{\partial F}{\partial x'}$ für die beiden die Ecke in P_1 bildenden Extremalenrichtungen; analog bei $\frac{\partial F}{\partial y'}$.

Da diese Ableitung aber, wie gesagt, bei willkürlicher Wahl von $\dot{x}$, $\dot{y}$ Null sein soll, so müßten $\frac{\partial F}{\partial x'}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ für verschiedene x', y' gleiche Werte haben, wenn wirklich in P_1 eine Ecke vorhanden sein soll. Dies widerspricht der neuen Voraussetzung, so daß also das Minimaxpolygon keine Ecken hat. Es besteht somit aus einer einzigen geschlossenen Extremalen. Diese kurze Beweisskizze mag hier genügen.

Es ist von vornherein einleuchtend, daß man auch mit Hilfe dieser Minimaxmethode keinen Aufschluß über die Gesamtheit der geschlossenen Extremalen gewinnt. So liefert ja die Methode z. B. nur den Nachweis für die Existenz mindestens einer geschlossenen geodätischen Linie auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null, während es deren doch, wie z. B. auf der Kugel, unendlich viele geben kann. Da setzt nun eine weitere sehr feinsinnige, in ihren Grundzügen auf *Poincaré* zurückgehende Methode ein. Ich berichte wieder über ihre Ausgestaltung durch *Birkhoff*.

---

[1]) Daß die einzige im Minimaxpunkte außer den schon hier berührten noch vorkommende Voraussetzung auch erfüllt ist, kann man leicht einsehen.

[2]) Vgl. z. B. Bolza: Variationsrechnung S. 367.

Zunächst die folgende nützliche geometrische Deutung der Bewegungszustände. Wir reden vom Bewegungszustand, indem wir den Parameter t als Zeit auffassen. Ein einzelner Bewegungszustand ist dann durch Angabe von x, y, x', y', also von vier Koordinaten, bestimmt. Der Mannigfaltigkeit der Bewegungszustände entspricht eine Punktmenge in einem vierdimensionalen Raum. Normieren wir den Parameter t in geeigneter Weise, so machen wir die Beobachtung, daß wir es mit einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit im vierdimensionalen Raum zu tun haben. Wir können die Einheit der Zeitmessung z. B. so wählen, daß $F = 1$ ist. Das ist dann die Gleichung der erwähnten Fläche im vierdimensionalen Raum, deren Punkte die Bewegungszustände repräsentieren. Einer geschlossenen Extremalen entspricht wieder eine geschlossene Kurve in dieser dreidimensionalen Mannigfaltigkeit. Einer jeden Extremalen entspricht eine Kurve, die wir, um einen kurzen Namen zu haben, aus einem bald deutlichen Grund Stromlinien nennen. Die weiteren Darlegungen knüpfen nun an die Einführung einer geeigneten zweidimensionalen Fläche an, welche in jedem genügend großen Zeitintervall von allen Stromlinien durchsetzt wird. Diese Fläche, welche wir *Schnittfläche* nennen wollen, wird außerdem von geschlossenen Stromlinien begrenzt und von allen anderen Stromlinien unter einem von Null verschiedenen Winkel getroffen, der aber bei Annäherung an den Rand wie die erste Potenz der Entfernung vom Rande gegen Null strebt. Es liegt natürlich nicht auf der Hand, daß es eine solche Schnittfläche gibt, aber *Birkhoff* hat für ziemlich allgemeine Klassen von Variationsproblemen die Existenz der Schnittflächen nachgewiesen.

Ich gehe hier nicht auf die Beweisführung ein, sondern begnüge mich mit der Angabe, daß die Existenz der Schnittfläche durch *Birkhoff* bewiesen wurde z. B. für das Problem der geodätischen Linien auf den geschlossenen Flächen, deren Geschlecht Null übertrifft, und für das Problem der geodätischen Linien auf geschlossenen Flächen vom Geschlechte Null unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß keine geschlossenen geodätischen Linien vom Minimumtypus ohne Doppelpunkte vorhanden sind. Ich begnüge mich mit dieser Angabe und will nun weiter den Grundgedanken der Methode unter Beschränkung auf das Problem der geodätischen Linien darlegen. Die Methode beruht auf der Einführung einer mit den Stromlinien eng verknüpften *Transformation der Schnittfläche in sich.* Jede Stromlinie trifft, wie vorausgesetzt wurde, in jedem genügend großen Zeitintervall die Schnittfläche. Verfolgen wir also eine nicht dem Rande angehörige Stromlinie von einem Schnittpunkt aus für wachsende Zeiten weiter, so folgt aus dieser Voraussetzung, daß sie die Schnittfläche noch ein zweites Mal treffen muß. So wird jedem Punkt der Schnittfläche ein wohl bestimmter anderer zugeordnet, nämlich der

nächste Treffpunkt der ihn passierenden Stromlinie. So ist also dem Variationsproblem eine umkehrbar eindeutige und, wie man leicht sieht, auch stetige Transformation der Schnittfläche in sich zugeordnet. Geschlossene Stromlinien müssen offenbar durch Punkte der Schnittfläche gehen, die nach endlich oftmaliger Anwendung der Transformation in die Ausgangslage zurückgeführt werden. Denn eine geschlossene Stromlinie hat nur endlich viele Schnittpunkte mit der Schnittfläche gemeinsam. Unsere Transformationen der Schnittfläche in sich besitzen nun außerdem noch eine positive Integralinvariante. D. h. es gibt eine auf der Schnittfläche erklärte positive Funktion $\mathfrak{p}$ derart, daß das $\iint \mathfrak{p}\, df$ erstreckt über zwei bei der Transformation einander entsprechende Teile der Schnittfläche denselben Wert hat. Dies ist leicht einzusehen. Ich führe die Überlegung an dem *Beispiel der geodätischen Linien* vor. Wir führen der Bequemlichkeit wegen in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Bewegungszustände geeignete Koordinaten ein. Zunächst führen wir auf der Fläche, deren geodätische Linien untersucht werden sollen, isotherme Koordinaten ein. Dadurch wird das Linienelement auf die Form

$$s'^2 = a(x, y)(x'^2 + y'^2)$$

gebracht, wo $a(x, y)$ eine positive analytische Funktion ist. Der Parameter t längs der Extremalen werde wieder durch $a(x'^2 + y'^2) = 1$ normiert. Dann werden, wie man nach leichter Rechnung sieht, die Differentialgleichungen der geodätischen Linien.

$$\begin{aligned} a\,x'' + a_x x'^2 + a_y x' y' - \frac{a_x}{2a} &= 0, \\ a\,y'' + a_x x' y' + a_y y'^2 - \frac{a_y}{2a} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Da nun aber x' und y' an die Bedingung $a(x'^2 + y'^2) = 1$ geknüpft sind, liegt es nahe, einen Parameter φ so einzuführen, daß

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\varphi, \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

wird. Dann liefert die Differentiation von $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}$ nach t:

$$\varphi' = a(x'\,y'' - y'\,x''). \tag{5}$$

Aus den beiden Gleichungen (3) findet man dann

$$\varphi' = \frac{1}{2} \frac{(a_x y' - a_y x')}{a} = \frac{1}{2} \frac{a_x \sin\varphi - a_y \cos\varphi}{a^{3/2}}, \tag{6}$$

so daß (4) und (6) nun die Differentialgleichungen der Stromlinien sind. x, y, φ sind Parameter in der dreidimensionalen Mannigfaltig-

keit der Bewegungszustände. Schreibt man (4) und (6) in der Form

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = X(x,\ y,\ \varphi), \\ y' = Y(x,\ y,\ \varphi), \\ \varphi' = \Phi(x,\ y,\ \varphi), \end{cases}$$

so sieht man sofort, daß $X_x + Y_y + \Phi_\varphi = 0$ ist. Das erinnert an die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik der inkompressiblen Flüssigkeiten. Und tatsächlich kann man auch hier den Schluß ziehen, daß das Volumen $\iiint dx\,dy\,d\varphi$ eines beliebigen Bereiches bei der durch die Gleichungen (7) definierten Strömung unverändert bleibt. Zu dem Zwecke ist nur zu zeigen, daß das über die Oberfläche eines Bereiches erstreckte Integral der zu dieser Oberfläche normalen Geschwindigkeitskomponente der Strömung Null ist. Nun sind aber X, Y, Φ die drei Geschwindigkeitskomponenten. $\mathfrak{v}$ sei der Geschwindigkeitsvektor, ξ der Vektor der Flächennormalen. Dann ist $\iint \mathfrak{v} \cdot \xi\, df$ erstreckt über die Oberfläche des Bereiches das Oberflächenintegral der Normalkomponente der Geschwindigkeit; $\mathfrak{v} \cdot \xi$ ist dabei das innere Produkt der beiden Vektoren, also da ξ ein Einheitsvektor ist, der Normalkomponente der Geschwindigkeit gleich. Nach dem *Gauß*schen Satz der Integralrechnung ist aber dies Oberflächenintegral gleich dem Volumintegral

$$-\iiint (X_x + Y_y + \Phi_\varphi)\, dx\,dy\,d\varphi\,.$$

Hier ist aber das Integral Null, und somit ist unsere Behauptung bewiesen. Wir wenden das Ergebnis insbesondere auf einen Stromfaden an, d. h. wir legen durch die Punkte eines zweidimensionalen Flächenstückes die Stromlinien hindurch und verfolgen dieselben bis zu irgendeinem anderen zweidimensionalen Flächenstück hin. Der von diesen beiden Flächenstücken und den durch ihre Ränder gehenden Stromlinien begrenzte Bereich ist der Stromfaden. Da an den von den Stromlinien gebildeten Rändern die Normalkomponente der Geschwindigkeit Null ist, so bleibt vom Oberflächenintegral nur das über die beiden zweidimensionalen Flächenstücke erstreckte übrig und die Summe dieser beiden Oberflächenintegrale der Normalkomponente der Geschwindigkeit ist Null. Dabei sind aber immer die äußeren Normalen zu nehmen. Die eine derselben weist in die Stromrichtung, die andere in die entgegengesetzte Richtung. Daher können wir auch sagen, das Integral der Normalkomponente der Geschwindigkeit hängt von der Wahl des zweidimensionalen durch den Stromfaden gelegten Flächenstückes nicht ab, wenn man dabei immer die nach der Bewegungsrichtung genommene Normalkomponente der Geschwindigkeit verwendet. Die Strömung führt eben in der Zeiteinheit durch alle Querschnitte des Stromfadens die gleiche Flüssigkeitsmenge hindurch. Wenden wir dies insbesondere auf die Schnittfläche und zwei auf ihr

durch die Strömung ineinander übergeführte Flächenstücke an, so sind dies gerade zwei Querschnitte eines Geschwindigkeitsfadens. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit ist eine positive Funktion und das Oberflächenintegral derselben ist die gesuchte Integralinvariante. Das Problem der geschlossenen Extremalen läuft somit jetzt auf die Frage nach denjenigen Punkten der Schnittfläche hinaus, die bei einer umkehrbar eindeutigen Transformation derselben mit positiver Integralinvariante fest bleiben. Darauf war schon *Poincaré* aufmerksam geworden und er hat in seinem letzten geometrischen Theorem versucht, in einem bestimmten Falle die Existenz solcher Fixpunkte zu beweisen. *Birkhoff* hat dann später den Beweis wirklich erbracht. Dies letzte *Poincaré*sche Theorem aber ist dieses: Wenn eine umkehrbare eindeutige und stetige Transformation eines Kreisringes (begrenzt von zwei konzentrischen Kreisen) eine positive Integralinvariante besitzt, stetig aus der Identität erzeugt werden kann und dabei beide Randkurven in verschiedener Richtung transformiert werden, so sind mindestens zwei Fixpunkte vorhanden. *Birkhoff* hat in seiner Arbeit, über die ich hier berichtet habe, noch weitere analoge Sätze ausgesprochen und bewiesen. Aber es mag das Gesagte genügen, um zu zeigen, in welch weitem Maße Sätze der Analysis situs für die Zwecke der Theorie der Differentialgleichungen nutzbar gemacht werden können.

Als Beispiel zu der Theorie dieses Paragraphen bietet sich das Problem der Attraktion eines Massenpunktes von 2 festen Zentren. Von einem mehr formalen Standpunkt aus wird uns dies Problem später noch (S. 231) beschäftigen. Wegen der Diskussion des Bewegungsverlaufes vergleiche man z. B. *Charlier*: Die Mechanik des Himmels, I, S. 117ff.

§ 2. Die Lösungskurven linearer Differentialgleichungen.

Schon auf S. 116/117 haben wir gelernt, daß man die Differentialgleichung

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

durch die Substitution

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx} \cdot v$$

auf die Gestalt

$$v'' + v\left\{q(x) - \tfrac{1}{4}(p(x))^2 - \tfrac{1}{2}p'(x)\right\} = f(x)\,e^{\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$$

bringen kann. Wir wollen weiterhin annehmen, daß eine Differentialgleichung von der Form

$$y'' + \varrho(x)\,y = 0 \tag{1}$$

vorgelegt sei.

An die Spitze stelle ich die schon S. 108 erwähnte Bemerkung, daß eine jede Lösung in jedem Stetigkeitsintervall des Koeffizienten $\varrho(x)$ samt ihrer ersten Ableitung stetig ist. Damit ist folgendes ge-

meint: Die in der Umgebung von $x = x_0$ durch $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ festgelegte Lösung ist nicht allein in der nächsten Umgebung dieser Stelle, sondern in dem vollen Stetigkeitsintervall von $\varrho(x)$, welchem x_0 angehört, als stetige Funktion definiert. Um das zu erkennen, ist, wie schon damals festgestellt wurde, im wesentlichen nur der Nachweis nötig, daß in jedem solchen Intervall das Verfahren der sukzessiven Aproximationen zu einer gleichmäßig konvergenten Reihendarstellung der Lösung führt. Dies ist aber hier sehr leicht zu sehen. Es möge etwa diejenige Lösung bestimmt werden, welche bei $x = x_0$ den Wert y_0 und die Ableitung 1 hat. Als erste Näherung wähle ich $y = y_0$.

Dann wird die zweite Näherung

$$(1') \qquad y_1 = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \varrho\, y_0\, dx\, dx + (x - x_0) + y_0.$$

Allgemein wird für die n-te Näherung

$$y_n = -\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \varrho\, y_{n-1}\, dx\, dx_1 + (x - x_0) + y_0.$$

Daher ist

$$|\, y_n - y_{n-1}\,| < \mathsf{P}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} |\, y_{n-1} - y_{n-2}\,|\, dx\, dx \qquad (|\,\varrho(x)\,| < \mathsf{P}).$$

Nun aber folgt aus (1')

$$|\, y_1 - y_0\,| \leqq |\, x - x_0\,| + \mathsf{P}\,|\, y_0\,|\, \frac{|\, x - x_0\,|^2}{2}.$$

Daher ist

$$|\, y_2 - y_1\,| < \mathsf{P}\,\frac{|\, x - x_0\,|^3}{3!} + \mathsf{P}^2\,|\, y_0\,|\, \frac{|\, x - x_0\,|^4}{4!}$$

und daraus findet man durch vollständige Induktion

$$|\, y_n - y_{n-1}\,| < \mathsf{P}^{n-1}\,\frac{|\, x - x_0\,|^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathsf{P}^n\,|\, y_0\,|\, \frac{|\, x - x_0\,|^{2n}}{(2n)!}.$$

Daher konvergiert die Reihe

$$y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

gleichmäßig in jedem Stetigkeitsintervall, in dem es eine Schranke P gibt, so daß $|\,\varrho(x)\,| < \mathsf{P}$ ist; daß das eine Lösung ist, erkennt man in der von S. 28 bekannten Weise.

Wir wollen nun versuchen, festzustellen, welche Schlüsse das Vorzeichen von $\varrho(x)$, sowie die Schranken, zwischen welchen diese Funktion liegt, hinsichtlich des qualitativen Verlaufs der Lösungen zulassen.

Ich will als ersten Fall den betrachten, daß im Intervall $a \leqq x \leqq b$

$$\varrho(x) < 0$$

ist. Dann ergibt sich aus

$$y'' = -\varrho(x)\, y,$$

daß stets y und y'' *gleiches* Vorzeichen besitzen, daß also eine jede Lösung oberhalb der x-Achse ihre Höhlung nach oben, unterhalb der x-Achse ihre Höhlung nach unten kehrt. Für die Lösungen kommen daher bis auf Vorzeichen nur die in Fig. 10 angedeuteten drei Typen in Betracht. Keine nicht durchweg verschwindende Lösung kann daher im Intervall $a \leqq x \leqq b$ mehr als eine Nullstelle besitzen.

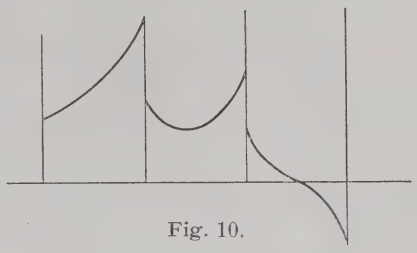

Fig. 10.

Der zweite Fall sei der, daß für $a \leqq x \leqq b$

$$\varrho(x) > 0$$

ist. Dann folgt aus der Differentialgleichung

$$y'' = -\varrho(x)\, y\,,$$

daß stets y und y'' *verschiedene* Vorzeichen besitzen. Eine jede Lösung kehrt also ihre Höhlung der x-Achse zu, auf ihr liegen die Wendepunkte. Man darf aber daraus nicht etwa schließen, daß nun alle Lösungen für Größe x die x-Achse schneiden. Das ist zwar bei den Lösungen von

$$y'' + y = 0$$

der Fall. Denn das allgemeine Integral $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ dieser Gleichung kann ja auch in der Form $C_1 \sin(x + C_2)$ geschrieben werden. Es ist aber z. B. nicht bei der Lösung $y = \sqrt{x}$ von $y'' + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\, y = 0$ der Fall.

Um diese beiden Fälle voneinander trennen zu können, muß der Einfluß der Größe von $\varrho(x)$ in Betracht gezogen werden. Da nämlich, wie wir eben sahen, schon allein der Umstand, ob ϱ größer oder kleiner als Null ist, mancherlei Schlüsse zuläßt, so wird zu erwarten sein, daß eine ungefähre Schätzung von ϱ im Intervall noch weitere Schlüsse erlaubt. *So wird man darauf geführt, die Lösungen verschiedener Differentialgleichungen miteinander zu vergleichen.* So wie wir eben mit gewissen Lösungen von $y'' = 0$ verglichen, wollen wir jetzt mit den Lösungen anderer Differentialgleichungen

$$z'' + \sigma(x)\, z = 0 \tag{2}$$

vergleichen.

Ich wende mich zunächst wieder zu $\varrho < 0$. In dieser Hinsicht gilt nun der folgende **Satz:**

In (1) *sei* $\varrho \leqq \sigma$, *aber nicht* $\varrho \equiv \sigma$. *Durch die Bedingungen* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ *sei ein positives Integral* $y(x)$ *von* (1) *festgelegt.* $z(x)$ *sei das Integral von* (2), *welches die gleichen Anfangsbedingungen erfüllt. Dann gilt* $y > z$ *für* $x > x_0$.

Aus den beiden Differentialgleichungen liest man ohne weiteres die Relation ab:

$$y'' z - z'' y + (\varrho - \sigma) y z = 0. \tag{3}$$

Integration derselben liefert

$$y' z - z' y = -\int_{x_0}^{x} (\varrho - \sigma) y z \, dx. \tag{4}$$

Da aber für $x > x_0$ sowohl y wie z positiv sind, da ferner $\varrho \leqq \sigma$ ist, so ist also $y' z - z' y > 0$ für $x > x_0$. Daraus folgt

$$\frac{y'}{y} > \frac{z'}{z}.$$

Nochmalige Integration ergibt

$$\frac{y}{y_0} > \frac{z}{z_0}.$$

Also ist wegen $y_0 = z_0$ wirklich

$$y > z.$$

Der Beweis gilt, solange $z > 0$ bleibt. Wird aber $z < 0$, so ist erst recht $y > 0 > z$.

Als Vergleichsdifferentialgleichungen bieten sich ohne weiteres z. B. die mit konstanten Koeffizienten dar. Da diese durch Exponentialfunktionen gelöst werden, so gewinnt man hier mit leichter Mühe z. B. folgendes Ergebnis:

Wenn in (1) *der Koeffizient* $\varrho(x)$ *für alle* $x > x_0$ *negativ ist, und wenn* $\lim_{x \to \infty} \varrho(x) = -a^2$ *gilt, so hat man für große* x *die Abschätzung:*

$$C e^{(a-\eta)x} < y(x) < C e^{(a+\eta)x}, \qquad (a > 0)$$

wobei C *und* η *beliebig wählbare positive Konstanten sind.*

Beweis: Für die Differentialgleichung

$$z'' - b^2 z = 0$$

besitzt das Integral

$$\frac{b y_0 + y_0'}{2b} e^{b(x-x_0)} + \frac{b y_0 - y_0'}{2b} e^{-b(x-x_0)} = z(b, x)$$

die gewünschten Anfangswerte. Hat man nun etwa die Aufgabe, die Integrale der Differentialgleichung

$$y'' + \varrho(x) y = 0$$

abzuschätzen, für den Fall, daß

$$\lim_{x \to \infty} \varrho(x) = -a^2$$

gilt, so liegt also von einem gewissen x ab $-\varrho$ zwischen $(a-\varepsilon)^2$ und $(a+\varepsilon)^2$. Daher hat man für y die Abschätzungen

$$y > \frac{(a-\varepsilon) y_0 + y_0'}{2(a-\varepsilon)} e^{(a-\varepsilon)(x-x_0)} + \frac{(a-\varepsilon) y_0 - y_0'}{2(a-\varepsilon)} e^{-(a-\varepsilon)(x-x_0)}$$

$$y < \frac{(a+\varepsilon) y_0 + y_0'}{2(a+\varepsilon)} e^{(a+\varepsilon)(x-x_0)} + \frac{(a+\varepsilon) y_0 - y_0'}{2(a+\varepsilon)} e^{-(a+\varepsilon)(x-x_0)}.$$

Da nun aber jedenfalls für jedes positive η

$$\lim_{x\to\infty} \frac{z(b,x)}{e^{(b+\eta)x}} = 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{(b-\eta)x}}{z(b,x)} = 0$$

gilt, so folgt aus unserer Abschätzung insbesondere die folgende

$$C\,e^{(a-\eta)x} < y < C\,e^{(a+\eta)x}.$$

Diese gilt nach beliebiger Wahl der positiven Zahlen C und η von einem gewissen x an.

Für allgemeinere Differentialgleichungen besitzt man aus Mangel an geeigneten Vergleichsdifferentialgleichungen keine ähnlich guten Ergebnisse. Gewisse andere naheliegende Überlegungen führen zu viel weniger guten Abschätzungen.

Nunmehr sei eine Differentialgleichung

$$y'' + \varrho(x)\,y = 0$$

vorgelegt. $\varrho(x)$ sei jetzt für $x > x_0$ stetig und *positiv*.

Ich beginne mit der folgenden Bemerkung. *Im Endlichen können sich die Nullstellen eines nicht identisch verschwindenden Integrales nicht häufen.* Denn in jedem Intervall aus $x > x_0$ ist jede Lösung samt ihrer Ableitung stetig. Dies folgt daraus, daß die Methode der sukzessiven Approximationen eine in jedem Intervall aus $x > x_0$ gleichmäßig konvergente Reihe liefert (S. 140). Wenn nun bei $x = \alpha$ etwa eine Häufungsstelle von Nullstellen läge, so müßte dort das betreffende Integral samt seiner Ableitung verschwinden[1]). Es wäre also identisch Null, da jede Lösung durch ihren eigenen und den Anfangswert ihrer Ableitung eindeutig bestimmt ist.

Betrachte ich nun zwei Integrale y_1 und y_2 derselben Differentialgleichung und nehme an, daß sie ein Fundamentalsystem bilden, daß also keines derselben identisch verschwinde und daß ihr Quotient nicht konstant sei, *dann liegt zwischen je zwei Nullstellen des einen Integrales mindestens eine Nullstelle des anderen*[2]).

Denn für je zwei Integrale hatten wir schon auf S. 120 die Formel

$$y_1\,y_2'' - y_2\,y_1'' = 0$$

gewonnen, die man leicht findet, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$y_1'' + \varrho\,y_1 = 0$$
$$y_2'' + \varrho\,y_2 = 0$$

---

[1]) Man kann bei der Bildung der Differenzenquotienten stets diese Nullstellen verwenden. Dann ist der Differenzenquotient stets Null und durch Grenzübergang auch der Differentialquotient.

[2]) Daraus folgt ein zweiter Beweis dafür, daß die Nullstellen einer Lösung keinen Häufungspunkt besitzen. Denn in diesem müßte dann jede andere Lösung gleichfalls verschwinden.

ϱ eliminiert. Integriert man nun zwischen zwei Nullstellen ξ und η von y_1, so erhält man

$$y_2(\eta)\,y_1'(\eta) = y_2(\xi)\,y_1'(\xi). \tag{5}$$

Man darf nun annehmen, daß ξ und η zwei *aufeinanderfolgende* Nullstellen sind und daß zwischen beiden $y_1 > 0$ ist. Dann ist jedenfalls

$$y_1'(\xi) > 0 \quad \text{und} \quad y_1'(\eta) < 0.$$

Man darf weiter annehmen, daß $y_2(\xi) > 0$ sei[1]). Dann lehrt die Formel (5), daß $y_2(\eta) < 0$ sein muß. Daher liegt zwischen ξ und η mindestens eine Nullstelle von y_2. Da man aber ebenso schließen kann, daß zwischen zwei Nullstellen von y_2 mindestens eine von y_1 liegt, so kann man das Ergebnis dahin verschärfen, daß *zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der einen Lösung* ***genau eine*** *der anderen liegt.*

Man erkennt daraus schon, daß zwischen dem Abstand der aufeinanderfolgenden Nullstellen und dem Koeffizienten $\varrho(x)$ ein abschätzbarer Zusammenhang bestehen muß. Ihn wollen wir jetzt ergründen.

Dazu führt eine ähnliche Bemerkung wie bei $\varrho(x) < 0$. *Wieder gilt in gewissem Umfang die Bemerkung, daß die Differentialgleichung mit größerem ϱ die kleineren Integrale besitzt.* Um sie scharf zu fassen, nehme ich an, es seien zwei verschiedene Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y'' + \varrho(x)\,y &= 0 \\ z'' + \sigma(x)\,z &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

vorgelegt und es sei $\varrho(x) \leqq \sigma(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Man gewinnt dann sofort die Formel

$$y''z - z''y = (\sigma - \varrho)\,y\,z. \tag{7}$$

Ich nehme nun an, daß y und z bei $x = x_0$ verschwinden und dort die gleiche Richtung haben. Integriere ich dann die Formel (7) von x_0 bis x $(\alpha \leqq x_0 < x \leqq \beta)$, so finde ich

$$y'z - z'y = \int_{x_0}^{x} (\sigma - \varrho)\,y\,z\,dx. \tag{8}$$

Hieraus folgt für $x > x_0$, und wenn y und z positiv sind,

$$y'z - z'y > 0.$$

---

[1]) Wäre auch $y_2(\xi) = 0$, so gingen beide Lösungen durch Multiplikation mit dem Quotient ihrer Richtungsgrößen in diesem Punkte auseinander hervor. Sie haben ja dann bei $x = \xi$ den gleichen Wert Null und unterscheiden sich nur in den dort vorgeschriebenen Ableitungen $y'(\xi)$, die bei keiner — die nicht identisch Null ist — Null sein kann. Durch Multiplikation einer solchen Lösung mit einer geeigneten Konstanten bleibt der Wert $y(\xi) \neq 0$ erhalten, während man $y'(\xi)$ jeden beliebigen Wert verschaffen kann. Linear unabhängige Integrale haben also keine gemeinsame Nullstelle. Wäre aber $y_2(\xi) < 0$, so dürfte ich zu $-y_2$ übergehen, weil dabei die Lage der Nullstellen nicht geändert wird.

Also wird

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{y'z - yz'}{z^2} > 0$$

für $x > x_0$. Also wächst $\frac{y}{z}$. Da aber $\lim_{x \to x_0} \frac{y}{z} = 1$ ist, so ist

$$y > z \quad \text{für} \quad x > x_0 \tag{9}$$

und unter der Annahme, daß y und z positiv sind.

Bis zur nächsten Nullstelle der Integrale besitzt also jedenfalls die Differentialgleichung mit größeren Koeffizienten das kleinere Integral, wenn beide in gleicher Richtung steigend durch ihre gemeinsame Nullstelle x_0 hindurchgehen.

Bei größeren Koeffizienten der Differentialgleichung liegen also insbesondere die Nullstellen näher beieinander als bei kleineren.

Ich ziehe zur weiteren Präzisierung des Resultates die Differentialgleichung

$$z'' + a^2 z = 0$$

mit konstantem Koeffizienten heran.

$$z = \frac{y_0'}{a} \sin a(x - x_0) \tag{10}$$

ist dasjenige Integral derselben, welches für $x = x_0$ verschwindet und dessen Ableitung dort den Wert y_0' besitzt. Gilt nun für $\varrho(x)$ in dem Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ die Abschätzung $0 < m \leqq \varrho \leqq M$, so gilt für das durch $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = y_0' > 0$ festgelegte Integral derselben die Abschätzung

$$y \geqq \frac{y_0'}{\sqrt{M}} \sin \sqrt{M}(x - x_0) \tag{11}$$

sicher in dem kleineren der beiden Intervalle

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{und} \quad x_0 \leqq x \leqq \beta.$$

Für die nächste Nullstelle x_1 von y gilt also insbesondere

$$x_1 - x_0 \geqq \frac{\pi}{\sqrt{M}}.$$

Gehört dem Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ noch die nächste Nullstelle x_1 von y selbst an, so gilt auch die Abschätzung

$$y \leqq \frac{y_0'}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}(x - x_0). \tag{12}$$

Insbesondere hat man also dann

$$x_1 - x_0 \leqq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Wir fassen das Ergebnis so zusammen: *Wenn in dem Intervall* $\alpha \leqq x \leqq \beta$

$$0 < m \leqq \varrho(x) \leqq M$$

ist, so gilt für den Abstand Δx *zweier aufeinanderfolgender dem Intervall* $\alpha \leqq x \leqq \beta$ *angehöriger Nullstellen* x_0 *und* x_1 *von* y *die Abschätzung*

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqq \Delta x \leqq \frac{\pi}{\sqrt{m}}. \tag{13}$$

Hiernach kann man die Anzahl n der Nullstellen, welche eine Lösung y in dem Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ besitzt, abschätzen. Ich beschränke mich dabei auf den Fall, daß α und x_0 zusammenfallen. Man hat ja sofort

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi}\sqrt{m} \leqq n \leqq \frac{\beta - \alpha}{\pi}\sqrt{M}. \tag{14}$$

Man kann unser Ergebnis noch folgendermaßen verschärfen. Man betrachte zwei Integrale $y(x)$ und $z(x)$ der beiden Differentialgleichungen (6), welche beide bei x_0 verschwinden. Läßt man dann x wachsen, so wird die k-te Nullstelle ζ_k von $z(x)$ vor der k-ten Nullstelle η_k von $y(x)$ angetroffen. Diese Behauptung ist nach dem vorstehenden jedenfalls für die erste auf x_0 folgende Nullstelle richtig. Wir beweisen sie für die k-te durch vollständige Induktion.

Ich nehme also die Behauptung für die m-ten Nullstellen als bewiesen an. Die m-te Nullstelle ζ_m von z wird also vor der m-ten Nullstelle η_m von y angetroffen. Dann konstruiere ich eine Lösung $y_1(x)$ von (6), welche in ζ_m verschwindet, und suche ihre in der Richtung wachsender x folgende Nullstelle. Da aber y_1 zwischen η_m und η_{m+1} mindestens eine Nullstelle haben muß, so liegt die gewünschte folgende noch vor η_{m+1} und daher liegt auch ζ_{m+1} vor η_{m+1}.

Eine weitere Vervollständigung erhalten unsere Betrachtungen durch die Bemerkung, daß die Lage der Nullstellen stetig von einer Änderung der Differentialgleichung abhängt. Um die Aussage zu präzisieren, will ich annehmen, es sei eine Differentialgleichung

$$y'' + \varrho(x, \lambda)\, y = 0 \tag{15}$$

vorgelegt, in welcher für ein gewisses Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ der Koeffizient eine stetige Funktion des Parameters λ sei. Dann betrachte man wieder eine bei x_0 verschwindende Lösung, welche dort die Ableitung $y'(x_0) = 1$ besitzen möge. Man wandere von x_0 in Richtung wachsender x und es sei $\eta_n(\lambda)$ die n-te hier angetroffene Nullstelle. Sie hängt dann stetig von λ ab. Dies folgt unmittelbar daraus, daß, wie wir schon von S. 109 wissen, die angegebene Lösung $y(x, \lambda)$ stetig von λ abhängt. Um das zu erkennen, wähle man einen bestimmten Wert $\lambda = \lambda_0$, für den man die Stetigkeit untersuchen will. Man grenze um $\eta_n(\lambda_0)$ ein Intervall ab, in dem keine weitere Nullstelle

von $y(x, \lambda_0)$ liegt. An Anfang und Ende soll also $y(x, \lambda_0)$ verschiedenes Vorzeichen haben. Für alle λ-Werte, welche hinreichend wenig von λ_0 verschieden sind, besitzt dann $y(x, \lambda)$ wieder an Anfang und Ende verschiedenes Vorzeichen, und daher besitzt auch für diese λ-Werte $y(x, \lambda)$ in dem Intervall mindestens eine Nullstelle. Da man das Intervall beliebig klein und die brauchbare λ-Änderung entsprechend wählen kann, so folgt hieraus die stetige Abhängigkeit der Nullstelle vom Parameter, sowie erst feststeht, daß in dem Intervall nicht mehr als eine Nullstelle liegen kann. Dies aber folgt sofort daraus, daß man das Intervall so klein wählen kann, daß darin $y'(x, \lambda)$ einerlei Vorzeichen besitzt. Ferner wähle man die λ-Änderung so klein, daß dabei das Vorzeichen der Ableitung erhalten bleibt.

Nunmehr bringe ich diese Stetigkeitsbetrachtung mit der seitherigen eines wachsenden positiven Koeffizienten $\varrho(x, \lambda)$ in Verbindung und setze nun also voraus, daß in (15) $\varrho(x, \lambda)$ bei festem x aus $x_0 \leqq x \leqq x_1$ eine stetige positive monoton wachsende Funktion von λ sei. Dann kann man die seitherige Betrachtung noch dahin ergänzen, daß die n-te Nullstelle $\eta_n(\lambda)$ mit wachsendem λ nach links rückt, daß also $\eta_n(\lambda)$ eine monoton abnehmende Funktion ist. Das folgt ja ohne weiteres aus der schon oben festgestellten Tatsache, daß die n-te Nullstelle einer Lösung der Gleichung mit größerem Koeffizienten vor der n-ten Nullstelle einer Lösung der Gleichung mit kleinerem Koeffizienten angetroffen wird. Nimmt man nun endlich noch an, daß $\varrho(x, \lambda)$ für $\lambda \to \infty$ einer Grenzfunktion $\varrho(x)$ gleichmäßig zustrebe, so liegt die Vermutung nahe, und man kann es auch leicht beweisen, daß die Lage der Nullstellen einer Grenzlage zustrebt, welche durch die Nullstellen einer Lösung der Grenzgleichung bestimmt ist. Von besonderem Interesse ist aber hier ein nicht unmittelbar in dieser Aussage enthaltener Fall, nämlich der, daß $\varrho(x, \lambda)$ gleichmäßig gegen Unendlich strebt für $\lambda \to \infty$ und $x_0 \leqq x \leqq x_1$, d. h. also, daß für hinreichend große λ im ganzen Intervall einschließlich der Enden $\varrho(x, \lambda)$ über jeder gegebenen Schranke liegt. Man erkennt sofort aus (14), daß dann mit wachsendem λ die Zahl der Nullstellen im Intervall beliebig groß werden wird.

Betrachten wir also z. B. die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda \varrho(x) y = 0,$$

wo $\varrho(x) > 0$ für $x_0 \leqq x \leqq x_1$, so ist zunächst nach S. 141 klar, daß für $\lambda < 0$ eine bei x_0 verschwindende Lösung keine weitere Nullstelle im Intervall besitzt. Das gleiche gilt nach (14) für genügend kleine positive λ. Andererseits aber besitzt die Lösung für genügend große λ beliebig viele Nullstellen im Intervall. Diese ändern sich stetig mit λ und zwar so, daß sie bei wachsendem λ nach links, bei fallendem λ nach rechts rücken. Die Anzahl der Nullstellen im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$

kann sich also nur in dem Augenblick ändern, wo eine Nullstelle mit dem Intervallende zusammenfällt. Es gibt also unendlich viele verschiedene Werte von λ: ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$ seien sie) derart, daß für jeden derselben, die am Anfang des Intervalles verschwindende Lösung auch am Ende des Intervalles verschwindet. Diese Werte sind durch die Zahl der Nullstellen, welche die zugehörige Lösung außerdem im Intervall besitzt, charakterisierbar. Die zu λ_1 gehörige Lösung besitzt nämlich keine weitere Nullstelle im Intervall. Die zu λ_2 gehörige eine weitere und so fort. Ohne weiteres läßt sich diese Überlegung auch auf die Differentialgleichung

$$y'' + (\sigma(x) + \lambda \varrho(x)) y = 0,$$

wo σ und ϱ in $x_0 \leqq x \leqq x$ stetig sind und wo außerdem in diesem Intervall $\varrho(x) > 0$ ist, übertragen. Wegen der zu Beginn dieses Paragraphen wieder besprochenen Substitution kann man damit das Ergebnis auch auf die allgemeinere Differentialgleichung

$$y'' + p(x) y' + (q(x) + \lambda \varrho(x)) y = 0$$

übertragen, wenn nur ihre Koeffizienten p, q, ϱ in $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stetig sind und dort außerdem $\varrho > 0$ ist. So erhalten wir endlich den folgenden Satz, den wir mit *Klein* das ***Oszillationstheorem*** nennen wollen: *Es gibt unendlich viele verschiedene Werte $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, die sogenannten Eigenwerte, für die es eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung von*

$$y'' + p y' + (q + \lambda_i \varrho) y = 0$$

gibt, welche am Anfang und Ende des Intervalles verschwindet. Die zu λ_i gehörige Lösung, die sogenannte i-te Eigenfunktion, besitzt im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ genau $i - 1$ Nullstellen außer den an den Enden gelegenen.

Die Verteilung der Eigenwerte soll nun für die spezielle Differentialgleichung

$$y'' + \lambda \varrho(x) y = 0$$

noch etwas näher untersucht werden. Es sei $m \leqq \varrho(x) \leqq M$.

Ich werde zeigen, daß

$$\lambda_n > \frac{n^2 \pi^2}{(\beta - \alpha)^2 M}$$

ist, daß also namentlich die Reihe

$$\sum \frac{1}{\lambda_n}$$

konvergiert. λ_n soll also der Eigenwert sein, dessen Eigenfunktion Nullstellen im Intervall besitzt. Es ist nämlich nach Formel (14) auf S. 146

$$n < \frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{\lambda_n \cdot M}.$$

Also ist wirklich

$$\lambda_n > \frac{n^2 \cdot \pi^2}{(\beta - \alpha)^2 M}. \tag{15}$$

Daher konvergiert die Reihe der reziproken Eigenwerte. Analog findet man noch

$$\lambda_n < \frac{n^2 \cdot \pi^2}{(\beta - \alpha)^2 m}.$$

§ 3. Randwertaufgaben.

Das Oszillationstheorem des vorigen Paragraphen ist ein erstes Beispiel für eine ganz neuartige Fragestellung. Bisher hatten wir eine Lösung immer durch ihren Wert und den Wert ihrer Ableitung an einer Stelle festgelegt. Schon bei der Kettenlinie und jetzt wieder tritt uns die Aufgabe entgegen, eine Lösung dadurch festzulegen, daß für zwei Werte von x die Werte der Lösung gegeben werden. Da diese in dem von diesen beiden Stellen begrenzten Intervall zu untersuchen ist und die Lösung somit durch Bedingungen an den Rändern des Intervalles festgelegt werden soll, so sprechen wir von einer Randwertaufgabe. Es gibt deren noch andere. Es wird immer darauf ankommen, durch zwei Bedingungen die beiden Integrationskonstanten festzulegen. Diese Bedingungen mögen durch zwei Gleichungen zwischen den Werten von $y(x)$ und $y'(x)$ an den Enden des Intervalles $x_0 \leqq x \leqq x_1$ geliefert werden, und zwar wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß eine lineare Differentialgleichung

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x) \tag{1}$$

vorgelegt ist, und daß zwei lineare Gleichungen die Randbedingungen liefern. Diese werden allgemein so aussehen:

$$\begin{aligned} c_1 y(x_0) + c_2 y'(x_0) + d_1 y(x_1) + d_2 y'(x_1) &= f \\ \gamma_1 y(x_0) + \gamma_2 y'(x_0) + \delta_1 y(x_1) + \delta_2 y'(x_1) &= \varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir teilen die Randwertaufgaben zunächst in homogene und inhomogene ein. Bei den homogenen sind sowohl Differentialgleichung wie Randbedingungen homogen, d. h. es verschwinden sowohl in (1) wie in (2) die rechten Seiten, so daß also wie im vorigen Paragraphen eine Lösung nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sein kann. Bei den inhomogenen ist mindestens eine der rechten Seiten in (1) und (2) von Null verschieden. Die *Randwertaufgabe*, die uns im vorigen Paragraphen begegnete und die auch bei der Kettenlinie vorlag, wollen wir die *erste* nennen. Hier sind also an den Intervallenden die Werte der unbekannten Funktion vorgeschrieben. Von der *zweiten* wollen wir reden, wenn an Anfang und Ende der Wert der Ableitung gegeben ist. Darüber hinaus gibt es noch mancherlei andere, denen wir keine besonderen Namen geben wollen. Wir

werden uns auch in dieser Darstellung wesentlich auf die erste Randwertaufgabe beschränken, zumal ja in dieser Sammlung ein anderes speziell den Randwertaufgaben gewidmetes Werk erscheinen soll. Es handelt sich ja hier auch um ein weites, in den letzten Jahren besonders intensiv untersuchtes Arbeitsfeld.

Ich beginne mit einer allgemeinen Beziehung zwischen homogenen und inhomogenen Randwertaufgaben, die in den linken Seiten von (1) und (2) übereinstimmen. Da gilt der Satz: *Die inhomogene Aufgabe ist stets dann lösbar, wenn die zugehörige homogene keine Lösung besitzt. Ist aber die homogene lösbar, so besitzt eine zugehörige inhomogene nur dann Lösungen, wenn die rechten Seiten noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllen, ist also im allgemeinen nicht lösbar.* Diese *Alternative* erinnert an eine bekannte Alternative aus der Theorie der linearen algebraischen Gleichungen, und tatsächlich folgt auch unser Satz unmittelbar aus diesem algebraischen. Wenn nämlich y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem der zu (1) gehörigen homogenen Gleichung bilden, so ist nach S. 122 die allgemeine Lösung von (1) selbst durch

$$(3)\qquad \frac{y_1 \int_{x_0}^{x} r(\xi)\, y_2(\xi)\, d\xi - y_2 \int_{x_0}^{x} r(\xi)\, y_1(\xi)\, d\xi}{[y'_1(x_0)\, y_2(x_0) - y_1(x_0)\, y'_2(x_0)]}\, e^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\, d\xi} + C_1 y_1 + C_2 y_2$$

gegeben. Die beiden Randbedingungen (2) laufen dann aber stets auf zwei lineare Gleichungen zwischen den C_1 und C_2 hinaus, deren rechte Seiten verschwinden, wenn ein homogenes Problem vorliegt. Im Fall der ersten Randwertaufgabe

$$y(x_0) = f, \quad y(x_1) = \varphi$$

sehen diese Bedingungsgleichungen z. B. so aus:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = f \\ &C_1 y_1(x_1) + C_2 y_2(x_1) = \varphi - \frac{y_1(x_1) \int_{x_0}^{x_1} r y_2\, d\xi - y_2(x_1) \int_{x_0}^{x_1} r y_1\, d\xi}{y_1'(x_0)\, y_2(x_0) - y_1(x_0)\, y_2'(x_0)}\, e^{\int_{x_0}^{x_1} p\, d\xi}. \end{aligned}$$

Daraus fließt aber unmittelbar die behauptete Alternative. Betrachten wir insbesondere ein homogenes Problem, so sehen wir, daß dasselbe nur dann lösbar ist, wenn die Determinante

$$y_1(x_0)\, y_2(x_1) - y_2(x_0)\, y_1(x_1)$$

verschwindet. Ist diese nicht Null, so ist jedes inhomogene Problem lösbar. Dieses ist aber für den Fall des Verschwindens der Determinante sicher nur dann lösbar, wenn die rechten Seiten der Gleichungen einer bekannten linearen Gleichung genügen. Ist insbesondere $f = \varphi = 0$, so müssen die rechten Seiten überhaupt verschwinden. Diese Bedingung kann leicht in einer etwas anderen Form angegeben werden. Wählen wir nämlich im Fundamental-

system y_1 als Lösung des homogenen Problems, so ist in (4) $y_1(x_1) = 0$, $y_2(x_1) \neq 0$ und daher lautet die Bedingung für das Verschwinden der rechten Seite von (4) offenbar, daß $\int_{x_0}^{x_1} r(\xi)\, y_1(\xi)\, d\xi = 0$ sein muß. In diesem Falle ist die Aufgabe auch tatsächlich lösbar und man bekommt die Lösung, wenn man in (3) $C_2 = 0$ einträgt. Die Lösung hängt dann — wieder wie beim algebraischen Problem — noch von einem Parameter C_1 ab.

Ich knüpfe noch einmal an (3) an, um dieser Formel noch eine etwas andere Gestalt zu geben. Ich nehme dabei an, den ersten homogenen Randbedingungen könne für die zu (1) gehörige homogene Gleichung nicht genügt werden, und will mit Hilfe von (3) diesen homogenen Randbedingungen für die inhomogene Gleichung (1) zu genügen suchen. Um dieser Formel eine bequeme Gestalt zu geben, lege ich y_1 und y_2 durch die Anfangsbedingungen $y_1(x_0) = y_2(x_1) = 0$ und die Zusatzbedingung $y_1'(x_0)\, y_2(x_0) - y_1(x_0)\, y_2'(x_0) = 1$ fest. Dann kann man die Lösung von (1) entweder in der Form

$$y = y_1 \int_{x_0}^{x} y_2\, r\, d\xi - y_2 \int_{x_0}^{x} y_1\, r\, d\xi - y_1 \int_{x_0}^{x_1} y_2\, r\, d\xi$$

oder in der Form

$$y = -\, y_2 \int_{x_1}^{x} y_1\, r\, d\xi + y_1 \int_{x_1}^{x} y_2\, r\, d\xi + y_2 \int_{x_1}^{x_0} y_1\, r\, d\xi$$

schreiben. In keiner der beiden Schreibweisen tritt die Gleichberechtigung der beiden Punkte x_0 und x_1 hervor. Man kann aber die Formel noch ein wenig anders schreiben, so daß x_0 und x_1 symmetrisch in die neue eingehen. Man nimmt das arithmetische Mittel von beiden und findet

$$\begin{aligned} y = {} & \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \{y_1(x)\, y_2(\xi) - y_1(\xi)\, y_2(x)\}\, r(\xi)\, d\xi \\ & + \tfrac{1}{2} \int_{x_1}^{x} \{y_1(x)\, y_2(\xi) - y_1(\xi)\, y_2(x)\}\, r(\xi)\, d\xi \\ & - \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \{y_1(x)\, y_2(\xi) + y_1(\xi)\, y_2(x)\}\, r(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Nun setzt man

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= y_1(\xi)\, y_2(x) \quad \text{für} \quad x_0 \leqq \xi \leqq x \\ &= y_2(\xi)\, y_1(x) \quad \text{für} \quad x \leqq \xi \leqq x_1. \end{aligned}$$

Dabei ist offenbar $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Man nennt diese Funktion die *Greensche Funktion* des Randwertproblems. Sie genügt in jedem der beiden Intervalle $x_0 \leqq x \leqq \xi$ und $\xi \leqq x \leqq x_1$ der Differential-

gleichung (1). Bei $x = \xi$ ist sie zwar stetig, aber ihre Ableitung erleidet dort eine sprunghafte Änderung. Es ist nämlich

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\xi-0} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\xi+0} = y_1'(\xi)\,y_2(\xi) - y_2'(\xi)\,y_1(\xi) = 1\,.$$

Dann kann man schreiben

$$y = -\int_{x_0}^{x_1} G(x,\xi)\,r(\xi)\,d\xi\,. \tag{5}$$

Manchmal bietet es Vorteile, von der Zusatzbedingung $y_1'(x_0)\,y_2(x_0) - y_1(x_0)\,y_2'(x_0) = 1$ abzusehen. Alsdann beachte man, daß $y_1'(x)\,y_2(x) - y_1(x)\,y_2'(x)$ konstant ist, und setze

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{y_1(x)\,y_2(\xi)}{y_1'(\xi)\,y_2(\xi) - y_1(\xi)\,y_2'(\xi)} = \frac{y_1(x)\,y_2(\xi)}{y_1'(x_0)\,y_2(x_0)} \text{ für } x_0 \leqq x \leqq \xi \\ &= \frac{y_1(\xi)\,y_2(x)}{y_1'(\xi)\,y_2(\xi) - y_1(\xi)\,y_2'(\xi)} = \frac{y_1(\xi)\,y_2(x)}{-\,y_1(x_1)\,y_2'(x_1)} \text{ für } \xi \leqq x \leqq x_1\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Formel (5) bleibt dann richtig.

§ 4. Nähere Betrachtung der Eigenfunktionen von $y'' + (\sigma + \lambda\varrho)\,y = 0$.

Wenn man zwei zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenfunktionen multipliziert und ihr Produkt mit $\varrho(x)$ über das Intervall x_0 bis x_1 integriert, so erhält man Null. Man sagt, je zwei Eigenfunktionen verschiedener Nummer seien zueinander *orthogonal*. Wir setzen $\varrho(x) > 0$ und stetig differenzierbar voraus. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} y_n'' + (\sigma(x) + \lambda_n\,\varrho(x))\,y_n &= 0\,, \\ y_m'' + (\sigma(x) + \lambda_m\,\varrho(x))\,y_m &= 0\,. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y_m, die zweite mit y_n und subtrahiert, so hat man

$$y_n''\,y_m - y_m''\,y_n = (\lambda_m - \lambda_n)\,\varrho(x)\,y_n\,y_m\,.$$

Integriert man von x_0 bis x_1, so kommt

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_{x_0}^{x_1} y_n\,y_m\,\varrho\,dx = (y_n'\,y_m - y_m'\,y_n)\Big|_{x_1}^{x_0} = 0\,.$$

Daher ist wegen $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$\int_{x_0}^{x_1} y_n\,y_m\,\varrho\,dx = 0$$

und das ist der analytische Ausdruck für die Orthogonalität der beiden Eigenfunktionen[1]).

[1]) Daraus folgt auch, daß alle Eigenwerte reell sind. Unter Eigenwert verstehen wir dabei irgendeinen reellen oder komplexen Wert von λ, für den die homogene Differentialgleichung eine am Anfang und Ende des Intervalles, aber nicht überall im Intervall verschwindende Lösung besitzt. Denn

Weiter ist wegen $\varrho > 0$

$$\int_{x_0}^{x_1} \varrho(x)\, y_n^{\,2}(x)\, dx \neq 0.$$

Da eine jede Eigenfunktion nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, so sollen dieselben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren so normiert werden, daß

$$\int_{x_0}^{x_1} \varrho(x)\, y_n^{\,2}(x)\, dx = 1$$

ist. Es wird sich zeigen, daß die so normierten Eigenfunktionen beschränkt sind, daß es also eine von n unabhängige Zahl M gibt, derart, daß für alle n und alle x in $x_0 \leqq x \leqq x_1$

$$|y_n(x)| \leqq M$$

gilt.

Wir werden dies Resultat als eine unmittelbare Folgerung aus einer asymptotischen Abschätzung der Eigenfunktionen gewinnen. Damit meinen wir eine näherungsweise Bestimmung der zu großen λ-Werten gehörigen Eigenfunktionen. Da für große λ die Änderungen, welche σ und ϱ im Intervall erfahren können, einen relativ geringen Einfluß auf die Werte von $\sigma + \lambda \varrho$ haben, so wird man diese als nahezu konstant ansehen dürfen. Somit liegt die Erwartung nahe, daß man die Eigenfunktionen näherungsweise durch einen Ausdruck dieser Form wird darstellen können

$$(1) \qquad Y = z_1(x) \cos\{\sqrt{\lambda} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varrho}\, dx\} + z_2(x) \sin\{\sqrt{\lambda} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varrho}\, dx\}.$$

Wir haben darüber hinaus im Sinn, für beliebige von Eigenwerten λ_i verschiedene λ ein Fundamentalsystem der Gleichung asymptotisch darzustellen. Insbesondere werde das durch $y_1(x_0) = y_2(x_1) = 0$ festgelegte gewählt. Diese beiden können ja dann kein konstantes Verhältnis besitzen, weil sie sonst bei x_0 *und* bei x_1 verschwänden, und also Eigenfunktionen wären.

---

mit jedem komplexen Eigenwert λ tritt auch sein konjugiert komplexer $\bar{\lambda}$ als Eigenwert auf. Dazu gehören konjugiert komplexe Eigenfunktionen $\varphi(x)$ und $\overline{\varphi(x)}$, für die also $\int_{x_0}^{x_1} \varrho(x)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(x)}\, dx = 0$ sein müßte. Da aber $\varrho(x) > 0$ ist und $\varphi(x)\, \overline{\varphi(x)} \geqq 0$ ist, so muß $\varphi(x) \equiv 0$ sein. Reelle Eigenwerte λ besitzen auch stets bis auf konstante Faktoren reelle Eigenfunktionen. Denn wäre $\varphi(x)$ eine zu dem reellen Eigenwert λ gehörige komplexe Eigenfunktion, so wären auch $\overline{\varphi(x)}$ und also auch das reelle $\varphi(x) + \overline{\varphi(x)}$ Eigenfunktionen. Alle zu demselben Eigenwert gehörige Eigenfunktionen sind aber bis auf konstante Faktoren einander gleich.

Trägt man den Ausdruck in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$(2)\quad \begin{cases} Y'' + (\sigma + \lambda\varrho)\, Y = z_1'' \cos\xi + z_2'' \sin\xi \\ \quad - z_1'\, 2\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}\sin\xi - z_1\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\varrho})'\sin\xi + \sigma z_1\cos\xi \\ \quad + z_2'\, 2\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}\cos\xi + z_2\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\varrho})'\cos\xi + \sigma z_2\sin\xi . \end{cases}$$

Dabei ist zur Abkürzung $\xi = \sqrt{\lambda}\int_{x_0}^{x}\sqrt{\varrho}\,dx$ gesetzt.

Nun soll hier z_1 und z_2 so bestimmt werden, daß nur die beiden ersten Glieder übrigbleiben. Um das aufs beste zu erreichen, schreibe ich $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ und fasse die Glieder zusammen, welche $\mathfrak{z}_1 = z_1 + i z_2$ und ebenso die, welche $\mathfrak{z}_2 = z_1 - i z_2$ enthalten. Beide Gliederaggregate setze ich dann einzeln Null. Das liefert die beiden Gleichungen

$$-2i\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}\,\mathfrak{z}_1' + \mathfrak{z}_1(-i\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\varrho})' + \sigma) = 0,$$
$$2i\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}\,\mathfrak{z}_2' + \mathfrak{z}_2(i\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\varrho})' + \sigma) = 0.$$

Aus ihnen findet man[1])

$$\mathfrak{z}_1 = d_1\, exp \int_{x_0}^{x} \frac{-i\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\varrho})' + \sigma}{2i\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}}\,dx,$$

$$\mathfrak{z}_2 = d_2\, exp \int_{x_0}^{x} \frac{-i\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\varrho})' - \sigma}{2i\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}}\,dx.$$

Also kann ich z. B. setzen

$$z_1 = D\,\frac{1}{\sqrt[4]{\varrho}}\sin\int_{x_0}^{x}\frac{\sigma}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}}\,dx,$$

$$z_2 = D\,\frac{-1}{\sqrt[4]{\varrho}}\cos\int_{x_0}^{x}\frac{\sigma}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}}\,dx,$$

wo D jetzt eine reelle Konstante ist. Trage ich dies in (1) ein, so erhalte ich ein $Y = Y_1$, für das die Anfangsbedingung $Y_1(x_0) = 0$ erfüllt ist.

Also kann ich nun z. B.

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{\varrho}}\sin\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\sigma}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}}\,dx - \sqrt{\lambda}\int_{x_0}^{x}\sqrt{\varrho}\,dx\right)$$

[1]) *exp* bedeutet „*e* hoch".

setzen. Eine ganz analoge Betrachtung liefert für eine bei x_1 verschwindende Lösung Y_2 den näherungsweisen Ausdruck

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{\varrho}} \sin\left(\int_{x_1}^{x} \frac{\sigma}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\varrho}}\, dx - \sqrt{\lambda} \int_{x_1}^{x} \sqrt{\varrho}\, dx \right).$$

Für die weitere Untersuchung sollen nun die in der Theorie der analytischen Funktionen einer Variablen λ bereitliegenden Hilfsmittel herangezogen werden. Wir lassen daher weiterhin für λ beliebige komplexe Werte zu. Dann werden die durch eine bestimmte Anfangsbedingung $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = \lambda$ festgelegten Lösungen eindeutige und analytische Funktionen von λ, deren reguläres Verhalten, wie wir noch genauer sehen werden, nur dann eine Unterbrechung erleidet, wenn λ einem Eigenwert λ_i gleich wird.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie nahe die Y_1 und Y_2 die entsprechenden Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung approximieren. Dazu haben wir zunächst festzustellen, bis auf welchen Fehler die beiden Funktionen der Differentialgleichung genügen. Man entnimmt leicht aus (2), daß die Einsetzung von Y_1 den Wert

$$\frac{M_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varrho}\, dx + M_2(\lambda) \sin \sqrt{\lambda} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varrho}\, dx}{\sqrt{\lambda}} \tag{3}$$

ergibt.

Dabei sind $M_1(\lambda)$ und $M_2(\lambda)$ Funktionen von x und λ, die für große λ unter einer festen Schranke liegen. Daraus erkennt man, daß für alle λ-Werte, deren Imaginärteil einen absoluten Betrag unterhalb einer festgewählten Schranke besitzt und deren Realteil einen hinreichend großen Betrag hat, die linke Seite der Differentialgleichung bis auf einen Fehler von der Form $\frac{M}{\sqrt{\lambda}}$ zu Null gemacht wird. Dabei ist M eine von λ unabhängige feste Zahl. Daraus wieder folgt, daß sich Y_1 von einer Lösung y_1 der Differentialgleichung, welche die gleichen Anfangsbedingungen bei x_0 besitzt, um einen Fehler gleicher Art unterscheidet.

Das ergibt sich aus dem aus S. 109 folgenden Satz über die einer Differentialgleichung ungefähr genügenden Funktionen. Ein ganz entsprechendes Ergebnis gewinnt man für Y_2. Daraus kann man z. B. entnehmen, daß die genügend großen Eigenwerte bis auf einen beliebig kleinen Fehler durch $\sqrt{\lambda} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho}\, dx = n\pi$ gegeben sind. Wir benutzen dies, um daraus auch eine Abschätzung der *Green*schen Funktion für λ von großem absolutem Betrag zu erhalten. Dabei ist die eben noch vorhandene Beschränkung des Real-

teils störend. Man entnimmt aber der Formel (3) sofort, daß diese Bedenken schwinden, wenn wir statt der Funktion $Y_1(x, \lambda)$ die Funktion

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{Y_1(x, \lambda)}{Y_2(x_0, \lambda)}$$

betrachten. Denn dann stehen in Zähler und Nenner von

$$\mathfrak{Y}_1'' + (\sigma + \lambda \varrho)\, \mathfrak{Y}_1$$

trigonometrische Glieder und der Quotient bleibt für große λ beschränkt, wenn man dabei λ nur auf einen Bereich beschränkt, dessen Rand eine feste Entfernung von allen Eigenwerten hat. Es ist leicht, diese Angabe durch Schätzungen im einzelnen zu erhärten. Doch will ich darauf nicht näher eingehen. Dies $\mathfrak{Y}_1$ unterscheidet sich nun von einem y_1, das bei x_0 verschwindet, dort die gleiche Richtung hat und der Differentialgleichung genügt, um einen Fehler von der Form $\left|\frac{M}{\sqrt{\lambda}}\right|$. Ebenso schließt man bei Y_2. Daraus folgt sofort nach der Definition der *Green*schen Funktion, daß eine aus den Y_1, Y_2 analog gebildete Funktion sich von der *Green*schen Funktion um einen Fehler gleicher Art unterscheidet. Man kann somit die *Green*sche Funktion für große λ abschätzen, wenn man die ebenso aus den Y_1, Y_2 gebildete Funktion zu schätzen vermag. Man rechnet aber leicht nach, daß diese abgeänderte *Green*sche Funktion selbst für große λ auf die Form $\frac{N}{|\sqrt{\lambda}|}$ gebracht werden kann. Dabei ist N eine Funktion, die für große λ unterhalb einer festen Schranke M bleibt. Daraus wieder folgt, daß die *Green*sche Funktion selbst für große λ ständig unter einer Schranke $\frac{M}{\sqrt{\lambda}}$ liegt. Bei allen diesen Abschätzungen hat man sich aber stets von den Eigenwerten λ_i fernzuhalten. Man kann also z. B. auf Quadraten abschätzen, deren vertikale Seiten in Punkten $\frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{2}$ die reelle Achse treffen.

Bemerkung: Auf die zu Beginn erwähnte Differentialgleichung lassen sich alle *Sturm-Liouville*schen Differentialgleichungen zurückführen. Diese sind im allgemeinsten Fall von der Form

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dy}{dx}\right) + \sigma(x)\, y + \lambda \varrho(x)\, y = 0\,,$$

$k(x)$, $\varrho(x)$ sollen dabei positiv stetig differenzierbare Funktionen sein. Macht man hier die Substitution

$$z = \int_0^x \frac{dx}{k}\,,$$

so geht die Gleichung in die seither immer behandelte spezielle

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \sigma(x)\, k(x)\, y + \lambda \varrho(x)\, k(x)\, y = 0$$

über. Daher gelten alle bisher bewiesenen Sätze auch für die allgemeine *Sturm-Liouville*sche Differentialgleichung.

§ 5. Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen eines Randwertproblemes.

Wenn wir insbesondere die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda y = 0$$

betrachten und für das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ die erste Randwertaufgabe vorlegen, so sind

$$\lambda_n = n^2$$

die Eigenwerte und

$$y = \sin n x$$

sind die zugehörigen Eigenfunktionen.

Es ist bekannt, daß man jede samt ihrer ersten Ableitung bis auf endlich viele Sprünge stetige Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ in eine Reihe von der Form

$$f(x) = \sum a_n \cdot \sin n x \tag{1}$$

entwickeln kann[1]). Die Koeffizienten ergeben sich leicht aus den Orthogonalitätsbedingungen

$$\begin{cases} \int_0^\pi \sin n x \cdot \sin m x \, dx = 0, & n \neq m \\ \int_0^\pi \sin^2 n x \, dx = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Setzt man nämlich die Reihe (1) als gleichmäßig konvergent voraus, multipliziert sie mit $\sin \nu x$ und integriert von 0 bis π, so erhält man wegen (2)

$$a_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin \nu x \, dx. \tag{3}$$

Ganz analog kann man auch die Koeffizienten einer nach beliebigen Eigenfunktionen fortschreitenden Reihe unter Verwendung der Orthogonalitätsbedingungen ausdrücken. Es seien etwa

$$\psi_1(x), \ \psi_2(x) \ldots$$

eine Folge von Funktionen, welche den Orthogonalitätsbedingungen

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} \psi_n \psi_m \varrho \, dx = 0, & n \neq m \\ \int_{x_0}^{x_1} \psi_n^2 \varrho \, dx = 1 \end{cases} \tag{4}$$

genügen. Nimmt man an, die Reihe

$$f(x) = \sum a_n \psi_n(x)$$

[1]) Man vergleiche z. B. die Seiten 78 ff. meines Leitfadens der Integralrechnung.

konvergiere gleichmäßig, so gewinnt man, genau wie oben, die Koeffizientendarstellung

$$a_n = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, \psi_n(x)\, \varrho(x)\, dx . \tag{5}$$

Es handelt sich aber nun darum, festzustellen, *unter welchen Voraussetzungen eine gegebene Funktion in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickelt werden kann.* Ich nehme dabei an, die $\psi_n(x)$ seien die Eigenfunktionen der ersten Randwertaufgabe einer Differentialgleichung $y'' + (\sigma + \lambda\varrho)\, y = 0$, wo $\varrho(x) > 0$ sei. Unter Verwendung der *Green*schen Funktion kann man leicht den folgenden Satz aufstellen:

Eine jede Funktion $f(x)$, die eine Integraldarstellung

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi \tag{6}$$

besitzt, kann in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(x) = \sum a_n \psi_n(x)$$

entwickelt werden.

Einer solchen Integraldarstellung sind aber namentlich die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen fähig, welche am Rand des Intervalles verschwinden. Denn eine solche Funktion $f(x)$ kann als Lösung einer Differentialgleichung

$$y'' + (\sigma + \lambda\varrho)\, y = f'' + (\sigma + \lambda\varrho)\, f = -h(x) \tag{7}$$

aufgefaßt werden, und dann kann man sie also in der Form

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi$$

darstellen.

Der ausgesprochene Entwicklungssatz wird bewiesen sein, sowie es gelungen ist, die *Green*sche Funktion selbst in eine solche Reihe zu entwickeln. Denn wenn etwa

$$G(x, \xi) = \sum c_\nu(\xi)\, \psi_\nu(x)$$

eine gleichmäßig konvergente Darstellung der *Green*schen Funktion ist, so trage man das in (6) ein. Dann wird

$$f(x) = \sum \psi_\nu(x) \cdot \int_{x_0}^{x_1} c_\nu(\xi)\, h(\xi)\, d\xi .$$

Daß hier die Koeffizienten in anderer Gestalt erscheinen, ist unwesentlich und besagt nichts gegen die *Möglichkeit,* die Koeffizienten *auch* in der vorhin gewonnenen Form darzustellen.

Somit kommt es also darauf an, zu beweisen, daß man die *Green*sche Funktion in der angegebenen Weise nach Eigenfunktionen

entwickeln kann. Dies kann man auf Grund der im vorigen Paragraphen gewonnenen asymptotischen Abschätzungen tatsächlich beweisen.

Zu dem Zwecke knüpfen wir an die erste Darstellung (6) von S. 152 der *Green*schen Funktion der Differentialgleichung $y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = 0$ an, indem wir dort in dem von ξ unabhängigen Nenner $\xi = x_1$ setzen:

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y_1(x, \lambda)\, y_2(\xi, \lambda)}{y_2'(x_1, \lambda)\, y_1(x_1, \lambda)} \quad \text{für } x_0 \leqq x \leqq \xi$$

$$= -\frac{y_2(x, \lambda)\, y_1(\xi, \lambda)}{y_2'(x_1, \lambda)\, y_1(x_1, \lambda)} \quad \text{für } \xi \leqq x \leqq x_1 .$$

Normiert man hier die y_1, y_2 durch die von λ unabhängigen Anfangsbedingungen

$$y_2'(x_1, \lambda) = -1, \quad y_1'(x_1, \lambda) = -1,$$

so ist aus dieser Darstellung ersichtlich, daß $G(x, \xi, \lambda)$ für jedes Wertepaar x, ξ eine analytische Funktion des Parameters λ ist. Wenn aber λ einem Eigenwert λ_i gleich wird, verschwindet der Nenner, und man sieht, daß dort die Funktion einen Pol besitzt. Tatsächlich werden wir sehen, daß sie beim Eigenwert λ_i einen einfachen Pol vom Residuum

$$-\psi_i(x)\psi_i(\xi)$$

besitzt, wobei mit $\psi_i(x)$ die zum Eigenwert λ_i gehörige durch

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi_i^2 \varrho \, d\xi = 1$$

normierte Eigenfunktion bezeichnet ist. Der Nenner $y_1(x_1, \lambda)$ ist jedenfalls eine analytische Funktion von λ, die auch in der Umgebung von $\lambda = \lambda_k$ regulär ist und dort verschwindet. Wir wollen feststellen, daß sie dort eine einfache Nullstelle hat. Zu dem Zwecke setze ich die Entwicklung

$$y_1(x, \lambda) = y_1(x, \lambda_i) + (\lambda - \lambda_i)\, \eta(x, \lambda_i) + \ldots \tag{8}$$

an. Hier ist mit η ein Koeffizient bezeichnet, dessen Berechnung unsere nächste Aufgabe ist. Geht man mit ihr in die Differentialgleichung hinein und ordnet nach Potenzen von $\lambda - \lambda_i$, so sieht man, daß η eine Lösung der Differentialgleichung

$$\eta'' + (\sigma + \lambda_i \varrho)\, \eta + \varrho\, y_1 = 0 \tag{9}$$

ist, und zwar eine Lösung, welche bei $x = x_0$ verschwindet, weil ja dort $y_1(x, \lambda)$ für alle λ verschwinden soll. Diese Lösung kann aber nicht auch bei $x = x_1$ verschwinden. Denn sonst wäre ja die erste Randwertaufgabe auch für diese inhomogene Gleichung (9) lösbar. Dies kann aber nach S. 151 nur dann der Fall sein, wenn $\varrho\, y_1$ zu y_1

orthogonal ist. Das hieße aber, es müßte $\int_{x_0}^{x_1} \varrho\, y_1^2\, d\xi = 0$ sein, was doch offenbar nicht der Fall ist. Also hat $y_1(x_1, \lambda)$ bei λ_i eine einfache Nullstelle. Es gilt noch ihr Residuum zu bestimmen. Dazu ist offenbar nur noch die eben eingeführte Funktion $\eta(x, \lambda_i)$ bei $x = x_1$ wirklich zu berechnen. Wir haben aber bisher nur die eine Anfangsbedingung $\eta(x_0, \lambda_i) = 0$ für dieselbe erwähnt. Die andere ist $\eta'(x_1, \lambda_i) = 0$, da ja die $y_1(x, \lambda)$ für alle λ in der *gleichen* Richtung den Punkt x_1 passieren sollen. Dann wird aber nach leichter Rechnung

$$\eta(x_1, \lambda_i) = -\int_{x_0}^{x_1} \varrho\, y_1(\xi, \lambda_i)\, y_2(\xi, \lambda_i)\, d\xi .$$

Das Residuum wird also

$$= \frac{y_1(x, \lambda_i)\, y_2(\xi, \lambda_i)}{\eta(x_1, \lambda_i)} \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq \xi ,$$

$$= \frac{y_2(x, \lambda_i)\, y_1(\xi, \lambda_i)}{\eta(x_1, \lambda_i)} \quad \text{für} \quad \xi \leqq x \leqq x_1 .$$

Nun ist aber

$$\psi_i(x) = \frac{y_1(x, \lambda_i)}{\sqrt{-\eta_1(x_1, \lambda_i)}}$$

die normierte Eigenfunktion. Ebenso ist

$$\psi_i(\xi) = \frac{y_1(\xi, \lambda_i)}{\sqrt{-\eta_1(x_1, \lambda_i)}} .$$

Die Funktion $y_2(x, \lambda_i)$ ist bis auf einen Faktor dieser Eigenfunktion gleich. Denn sie verschwindet ja bei x_1 und damit auch bei x_0 und hat bei x_1 wie y_1 die Ableitung -1. Sie stimmt also mit $y_1(x, \lambda)$ überein. Daher wird tatsächlich

$$-\psi_i(x)\, \psi_i(\xi)$$

das Residuum und

$$-\frac{\psi_i(x)\, \psi_i(\xi)}{\lambda - \lambda_i}$$

der Hauptteil von $G(x, \xi, \lambda)$. Wir leiten nun die Partialbruchreihe für $G(x, \xi, \lambda)$ her. Man gewinnt sie sofort, indem man

$$\frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu$$

über ein großes Quadrat Q mit dem Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt integriert. Seine Seiten sollen den Koordinatenachsen parallel sein und eine soll in der Mitte zwischen λ_n und λ_{n+1} die reelle Achse treffen. Dann liefert der Residuensatz

$$G(x, \xi, \lambda) = \sum \frac{\psi_k(x)\, \psi_k(\xi)}{\lambda_k - \lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{G(x, \xi, \mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu .$$

Dabei ist über alle im Quadrate liegenden λ_k zu summieren. Und

nun ist zu zeigen, daß dies Integral für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Dies folgt aber aus der Abschätzung von $G(x, \xi, \mu)$, die wir im vorigen Paragraphen gewonnen haben. Danach ist nämlich auf dem Rand des Quadrates

$$|G(x, \xi, \mu)| < \frac{M}{\sqrt{|\mu|}},$$

wo M eine vom Quadrat unabhängige Zahl ist. Denn die Ränder der benutzten Quadrate haben alle eine Entfernung von sämtlichen Eigenwerten, die oberhalb einer festen Schranke liegt. Die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Eigenwerte strebt nämlich für große Nummern nicht gegen Null, weil dieselben ja mit immer größerer Annäherung nach S. 155 durch $\lambda_k = \frac{k\pi}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho}\, dx}$ gegeben sind.

Daher geht der Rest für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Null und man findet die gleichmäßig konvergente Darstellung

$$G(x, \xi, \lambda) = \sum \frac{\psi_k(x)\, \psi_k(\xi)}{\lambda_k - \lambda} \tag{10}$$

und dies ist die gesuchte Entwicklung der *Green*schen Funktion nach den Eigenfunktionen $\psi_k(x)$.

Überdies ergeben sich nun aus dieser „Bilinearformel" (10) die Koeffizienten einer zu entwickelnden Funktion $f(x)$, welche den Randbedingungen genügt, in der Form (5). Denn man gehe von (6) aus und trage hier das aus (7) bestimmte $h(\xi)$ und die Bilinearform (10) ein. Durch partielle Integration beseitige man f'' und drücke das dabei neu hinein kommende ψ_n'' durch $-(\sigma + \lambda_i \varrho)\psi_n$ aus. Der Leser möge die Rechnung selbst durchführen.

§ 6. Die *Bessel*sche Differentialgleichung $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$.

Ich behandle sie als Beispiel zu den allgemeinen Erörterungen der vorstehenden Paragraphen, obwohl dabei nicht alle Voraussetzungen jenes Paragraphen erfüllt sind.

Zunächst wollen wir feststellen, daß diese Differentialgleichung, wie auch n^2 beschaffen sein mag, ein bei $x = 0$ endliches Integral besitzt. Zu dem Zweck gehen wir mit dem Ansatz

$$y = x^n \cdot v \quad (n > 0)$$

in die Differentialgleichung hinein. Eine leichte Rechnung ergibt dann für v die Differentialgleichung

$$xv'' + (2n + 1)v' + xv = 0.$$

Wir versuchen nun, derselben durch eine Potenzreihe

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

zu genügen. Setzt man sie ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
xv &= a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{2m} x^{2m+1} + a_{2m+1} x^{2m+2} + \dots \\
(2n+1)v' &= (2n+1)a_1 + 2(2n+1)a_2 x + 3(2n+1)a_3 x^2 + \dots \\
&\quad + (2n+1)(2m+2)a_{2m+2} x^{2m+1} \\
&\quad + (2n+1)(2m+3)a_{2m+3} x^{2m+2} + \dots \\
xv'' &= 2a_2 x + 6a_3 x^2 + \dots + (2m+2)(2m+1)a_{2m+2} x^{2m+1} \\
&\quad + (2m+3)(2m+2)a_{2m+3} x^{2m+2} \dots
\end{aligned}$$

Da die Summe Null sein soll, so genügt man der Gleichung, wenn man die Koeffizienten der einzelnen x-Potenzen Null setzt. Das führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_0 + 4(n+1)a_2 &= 0 \\
a_1 + 3(2n+3)a_3 &= 0 \\
&\vdots \\
a_{2m} + a_{2m+2} \cdot 2(2m+2)(m+n+1) &= 0 \\
a_{2m+1} + a_{2m+3}(2m+3)(2(n+m)+3) &= 0.
\end{aligned}$$

Man berechnet daraus

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 &= -\frac{1}{4}\frac{1}{n+1}a_0 \\
&\vdots \\
a_{2m} &= (-1)^m \cdot \frac{1}{2^{2m}}\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}\cdots\frac{1}{n+m}\cdot a_0 \\
a_{2m+1} &= 0.
\end{aligned}$$

So findet man als Lösung schließlich

$$(1) \qquad v = a_0 \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{1}{2^{2m}}\frac{1}{m!}\frac{\prod_{h=m}^{n}}{\prod_{h=0}^{}(n+h)} \cdot x^{2m}.$$

Da diese Potenzreihe nun offenbar einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat, so ist nachträglich einzusehen, daß unser Verfahren, das ein gliedweises Differenzieren der Reihe usw. benutzte, in Ordnung ist.

Die Methode, die wir hier verwendeten, heißt Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir werden sie noch häufig bei der Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwenden.

Ich setze nun noch wie üblich

$$a_0 = \frac{1}{2^n}\frac{1}{\Gamma(n+1)}$$

und bezeichne

$$(2) \qquad J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \cdot \Gamma(n+1)} \cdot v = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2^{n+2m}} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \frac{1}{\Gamma(m+n-1)} \cdot x^{n+2m}.$$

Man nennt die hierdurch dargestellte ganze Funktion die *Besselsche Funktion n-ter Ordnung*[1]).

Über ihre Nullstellen und ihr Verhalten für große Werte des Argumentes bekommen wir bequem Aufschluß, wenn wir durch die Substitution

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot z$$

von der *Bessel*schen Differentialgleichung zu einer anderen übergehen, in der die erste Ableitung fehlt. Die durch

$$z = \sqrt{x} \cdot J_n(x)$$

erklärte Funktion genügt dann, wie eine leichte Rechnung zeigt, der Differentialgleichung

$$(3) \qquad z'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0.$$

Da mit wachsendem x der Koeffizient gegen Eins strebt, so strebt nach S. 146 der Abstand zweier aufeinanderfolgender Nullstellen mit wachsender Nummer gegen π. Daher gilt nach S. 149 für die μ-te Nullstelle α_μ

$$\frac{\alpha_\mu}{\pi}(1 - \varepsilon) \leqq \mu \leqq \frac{\alpha_\mu}{\pi} \cdot (1 + \varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ von einem gewissen $\mu = \mu(\varepsilon)$ an. Also ist z. B. $\alpha_\mu \sim \mu\pi$. Die Amplituden der einzelnen Wellen sind beschränkt. Die Amplituden von $J_n(x)$ streben daher sogar wie $\frac{1}{\sqrt{x}}$ gegen Null.

Nunmehr betrachte ich die Funktion

$$(4) \qquad \varphi(x) = z(\lambda x) = \sqrt{\lambda x}\, J_n(\lambda x).$$

Sie genügt der Differentialgleichung

$$(5) \qquad \varphi'' + \left(\lambda^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) \varphi = 0.$$

---

[1]) Wir wollen uns jetzt nicht dabei aufhalten, nachzuweisen, daß das gefundene das einzige bei $x = 0$ endliche Integral ist. Denn später, S. 183, wird sich das aus allgemeinen Methoden ganz von selbst ergeben. Bei nicht ganzzahligem n allerdings kann man sich davon sehr leicht im Rahmen der eben angestellten Rechnung überzeugen. Man braucht nur statt wie eben in dem Ansatz $y = x^n v$ n positiv zu nehmen, mit $y = x^{-n} v$ $(n > 0)$ in die Gleichung hineinzugehen. Man findet dann wieder für v eine konvergente Potenzreihe. Aber y wird nun bei $x = 0$ unendlich, unterscheidet sich also von der ersten Lösung nicht bloß um einen konstanten Faktor und bildet daher mit dieser zusammen ein Fundamentalsystem. Daher sind alle anderen Lösungen bei $x = 0$ unendlich. Die Durchführung zeigt, daß nur für nicht ganzzahliges n ein neues Integral gefunden wird. Für ganzzahlige n aber wird $J_{-n}(x)$ sinnlos. Wie man hier ein zweites nicht endliches Integral findet, wird sich S. 183 ergeben.

Ich fasse λ als Parameter auf und suche ihn so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung Lösungen besitzt, welche bei $x = 0$ und bei $x = 1$ verschwinden. Dies ist dann der Fall, wenn λ einer Nullstelle α_μ von $J_n(x)$ gleichgesetzt wird. Denn $\sqrt{\alpha_\mu x}\, J(\alpha_\mu x)$ ist ja bei $x = 0$ Null; aber es ist auch für $x = 1$ Null. Denn es ist ja $J(\alpha_\mu) = 0$. Diese Eigenfunktionen sind nun naturgemäß beschränkt. Sie sind nach S. 157 auch zueinander orthogonal. Sie sind aber noch nicht normiert und man kann im Zweifel sein, ob sich die Betrachtungen des § 5 ohne weiteres übertragen lassen. Denn in mancher Beziehung sind die dort gemachten Annahmen hier nicht erfüllt. Einmal ist der Koeffizient $\varrho(x, \lambda) = \lambda^2 - \frac{4n^2-1}{x^2}$ hier nicht beschränkt. Ja er wird sogar, wenn nicht $n \leqq \frac{1}{2}$ ist, bei $x = 0$ negativ unendlich. Es wird sich daher empfehlen, durch eine direkte Betrachtung zu zeigen, daß die Eigenfunktionen auch nach ihrer Normierung noch beschränkt sind. α_μ und α_ν seien zwei beliebige Werte des Parameters λ, also nicht gerade Eigenwerte. Ich schreibe die beiden Differentialgleichungen

$$\varphi_\mu'' + \left(\alpha_\mu^2 - \frac{4n^2-1}{x^2}\right)\varphi_\mu = 0$$

$$\varphi_\nu'' + \left(\alpha_\nu^2 - \frac{4n^2-1}{x^2}\right)\varphi_\nu = 0$$

an, multipliziere die erste mit φ_ν, die zweite mit φ_μ und subtrahiere

$$\varphi_\mu''\varphi_\nu - \varphi_\nu''\varphi_\mu = (\alpha_\nu^2 - \alpha_\mu^2)\varphi_\mu\varphi_\nu.$$

Nun integriere ich von Null bis Eins und erhalte

$$\varphi_\mu'(1)\varphi_\nu(1) - \varphi_\nu'(1)\varphi_\mu(1) = (\alpha_\nu^2 - \alpha_\mu^2)\int_0^1 \varphi_\mu\varphi_\nu dx.$$

Wenn insbesondere α_ν und α_μ zwei verschiedene Eigenwerte sind, dann ist

$$\varphi_\nu(1) = \varphi_\mu(1) = 0,$$

$$\int_0^1 \varphi_\mu\varphi_\nu dx = 0$$

und wir haben aufs neue die Orthogonalitätseigenschaft. Nun schreibe ich aber bei beliebigen α_μ, α_ν das Resultat unter Verwendung von (4) so:

$$\frac{\sqrt{\alpha_\mu \cdot \alpha_\nu}}{\alpha_\mu + \alpha_\nu}\,\frac{\alpha_\mu J_n'(\alpha_\mu) J_n(\alpha_\nu) - \alpha_\nu J_n'(\alpha_\nu) J_n(\alpha_\mu)}{\alpha_\nu - \alpha_\mu} = \int_0^1 \varphi_\mu \cdot \varphi_\nu dx$$

und mache den Grenzübergang $\alpha_\nu \to \alpha_\mu$. Nach den Regeln der Differentialrechnung erhält man dann

$$\tfrac{1}{2}\alpha_\mu J_n'^2(\alpha_\mu) - J_n'(\alpha_\mu) J_n(\alpha_\mu) - \alpha_\mu J_n''(\alpha_\mu) J_n(\alpha_\mu) = \int_0^1 \varphi_\mu^2\, dx.$$

Wählt man nun für α_μ einen Eigenwert, so hat man wegen $J_n(\alpha_\mu) = 0$

$$\int_0^1 \varphi_\mu^2\, dx = \tfrac{1}{2}\alpha_\mu \cdot J_n'^2(\alpha_\mu).$$

Dividiert man also die

$$\varphi_\mu(x)$$

durch

$$\sqrt{\frac{\alpha_\mu}{2}} \cdot J_n'(\alpha_\mu),$$

so erhält man die normierten Eigenfunktionen

$$\psi_\mu(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha_\mu}} \frac{1}{J_n'(\alpha_\mu)} \varphi_\mu(x) = \frac{\sqrt{2x}}{J_n'(\alpha_\mu)} \cdot J_n(\alpha_\mu x),$$

deren Quadrat von Null bis Eins integriert den Wert 1 liefert.

In den $J_n(\alpha_\mu x)$ schreiben sich die abgeleiteten Orthogonalitätsrelationen so:

$$\int_0^1 x J_n(\alpha_\mu x) \cdot J_n(\alpha_\nu \cdot x)\, dx = 0 \qquad (\mu \neq \nu)$$

$$\int_0^1 x J_n^2(\alpha_\mu x)\, dx = \tfrac{1}{2} J_n'^2(\alpha_\mu).$$

Bemerkung: Noch ein ganz anderes Randwertproblem tritt uns bei den *Bessel*schen Funktionen entgegen. Wir setzten

$$\psi_\nu(x) = \frac{\sqrt{2x}\, J_n(\alpha_\nu x)}{J'(\alpha_\nu)}$$

und zeigten, daß man jede für $0 \leq x \leq 1$ zweimal stetig differenzierbare und bei $x = 0$ und $x = 1$ verschwindende Funktion $f(x)$ in eine Reihe

$$f(x) = \sum a_\nu \psi_\nu(x)$$

entwickeln kann. Bezeichnen wir mit $F(x)$ eine in $0 \leq x \leq 1$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, die nur bei $x = 1$ verschwindet, so gilt für $f(x) = \sqrt{x} F(x)$ unser Entwicklungssatz. Streicht man nun auf beiden Seiten aus den $\psi_n(x)$ und aus $F(x)$ den Faktor $\sqrt{x}$, so erhält man folgenden Entwicklungssatz: Jede in $0 \leq x \leq 1$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, die bei $x = 1$ verschwindet, läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$\sum b_\nu J_n(\alpha_\nu x)$$

entwickeln. Diese Darstellung gilt nach ihrer Herleitung überall, außer bei $x = 0$. Hier braucht sie nicht immer zu gelten. Denn z. B. verschwinden bei $x = 0$ für $n > 0$ alle Funktionen $J_n(\alpha_\nu x)$, während $F(x)$ dort nicht zu verschwinden braucht. Hier haben wir es also bei der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda x^2 - n^2) y = 0$$

mit folgendem Randwertproblem zu tun: Bei $x = 0$ wird Endlichkeit, bei $x = 1$ Verschwinden der Eigenfunktion verlangt.

Ein ähnliches Randwertproblem kommt auch bei den Kugelfunktionen vor. Hier bei den *Legendre*schen Polynomen handelt es sich um die bei $x = +1$ und bei $x = -1$ endlichen Lösungen von

$$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y = 0.$$

Wir werden sie später S. 197 ff. bestimmen lernen.

§ 7. Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen.

Die hier dargestellte Methode zur Behandlung der Randwertaufgaben und des Entwicklungssatzes ist sehr weiter Verallgemeinerungen fähig und man kann auf ihr eine volle Theorie aller Randwertaufgaben aufbauen. Von *Poincaré* ausgehend ist das namentlich in Arbeiten von *Birkhoff*[1]) und von *Hilb*[2]) hervorgetreten. Auch greift diese Theorie in die allgemeinen Theorien ein, denen wir uns nun zuwenden wollen.

Wir dürfen dieses Gebiet nicht verlassen, ohne wenigstens in großen Zügen den Zusammenhang der Randwertprobleme mit der Theorie der *Integralgleichungen* aufzudecken. Wir zeigen ihn wieder am Beispiel der ersten Randwertaufgabe. Es sei in der Differentialgleichung

$$y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = 0 \tag{1'}$$

σ so beschaffen, daß für $y'' + \sigma y = 0$ die erste Randwertaufgabe nicht lösbar ist (also z. B. $\sigma \equiv 0$). Dann besitzt diese Gleichung, wie wir wissen, eine *Green*sche Funktion $G(x, \xi)$. Somit gilt nach S. 152 für die an den Intervallenden verschwindende Lösung von (1') die homogene Integralgleichung

$$y(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, \xi) \varrho(\xi) y(\xi) \, d\xi . \tag{2'}$$

Ebenso findet man für die an den Rändern verschwindende Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + (\sigma + \lambda \varrho) y = h(x) \tag{1''}$$

die inhomogene Integralgleichung

$$y = -\lambda \int_{x_1}^{x_0} G(x, \xi) \varrho(\xi) y(\xi) \, d\xi + \int_{x_1}^{x_0} G(x, \xi) h(\xi) \, d\xi . \tag{2''}$$

Unsere Sätze lehren also, daß die Alternative besteht, wonach entweder die homogene oder die inhomogene Integralgleichung lösbar ist. Beide zugleich sind aber nur für gewisse Funktionen $h(x)$ lösbar. Ferner wissen wir, daß die homogene Gleichung nur für gewisse Eigenwerte λ_i durch gewisse Eigenfunktionen $\varphi_i(x)$ lösbar ist. Diese Sätze sind Spezialfälle der gleichlautenden Sätze über allgemeinere lineare Integralgleichungen mit symmetrischem Kern $K(x, \xi)$. Symmetrisch soll dabei der Kern heißen, wenn $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ ist.

---

[1]) American Transactions, Bd. 9.

[2]) Math. Annalen 71.

Wir betrachten dann die beiden Integralgleichungen:

$$(3') \qquad \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = 0,$$

$$(3'') \qquad \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x_1} K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \psi(x).$$

Über den Kern ist dabei vorauszusetzen, daß er stetig ist für $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $x_0 \leqq \xi \leqq x_1$ oder daß er doch wenigstens quadratisch integrierbar ist, d. h. daß das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} [K(x,\xi)]^2\,dx\,d\xi$$

konvergiert. Die von unseren Randwertproblemen herkommenden Integralgleichungen sind anscheinend nicht mit einem symmetrischen Kern versehen. Denn der Kern scheint $G(x,\xi)\,\varrho(\xi)$ zu sein. Man kann aber, z. B. die Integralgleichung (2') sofort auch so schreiben

$$(2'') \qquad y(x)\sqrt{\varrho(x)} + \lambda \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\varrho(x)}\,G(x,\xi)\sqrt{\varrho(\xi)}\cdot y(\xi)\sqrt{\varrho(\xi)}\,d\xi = 0.$$

Setzt man dann

$$y(x)\sqrt{\varrho(x)} = \varphi(x), \qquad \sqrt{\varrho(x)}\,G(x,\xi)\sqrt{\varrho(\xi)} = K(x,\xi)$$

so geht sie in die Gleichung (3') über. Man kann die Theorie dieser Integralgleichungen selbstständig entwickeln, wie es *Fredholm, Hilbert, E. Schmidt* getan haben, und hat damit einen neuen Zugang zu den Randwertproblemen. Auch der Entwicklungssatz gilt für die Eigenfunktionen dieser allgemeineren Integralgleichungen. Jede in der Form

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} K(x,\xi)\,h(\xi)\,d\xi$$

darstellbare stetige Funktion $f(x)$ läßt sich nach Eigenfunktionen entwickeln.

Es ist hier nicht der Ort, diese allgemeine Theorie der Integralgleichungen zu entwickeln, obwohl uns später bei den partiellen Differentialgleichungen ein etwas allgemeinerer Typus begegnen wird. Hier werde nur noch auf ein gewisses Analogon zum Entwicklungssatz, die sogenannte *Vollständigkeitsrelation*, hingewiesen. Auch im allgemeinen Fall sind die Eigenwerte alle reell und die Eigenfunktionen zueinander orthogonal. Daher gelten auch für die Darstellung der Koeffizienten bei der Entwicklung einer Funktion nach Eigenfunktionen die bekannten Integraldarstelluugen. Sei nun etwa $u(x)$ eine nach Eigenfunktionen entwickelbare und $v(x)$ eine beliebige stetige Funktion. Dann ist jedenfalls

$$u(x) = \sum \varphi_\nu(x) \cdot \int_{x_0}^{x_1} u(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi.$$

Daher wird

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v(x)\, dx = \sum \int_{x_0}^{x_1} v(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \cdot \int_{x_0}^{x_1} u(\xi)\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi .$$

Die Sache ist nun die, daß diese *„Vollständigkeitsrelation"* in den hier betrachteten zu Differentialgleichungen gehörigen Fällen auch dann gilt, wenn $u(x)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Ich gehe auf den Beweis nicht ein, sondern bemerke nur, daß er darauf beruht, daß man jede stetige Funktion durch eine entwickelbare mit beliebiger Genauigkeit approximieren kann. Ihren Namen Vollständigkeitsrelation hat sie daher, daß sie das System der Eigenfunktionen als ein vollständiges charakterisiert. Fehlte darin eine Funktion, so könnte die Relation offenbar nicht richtig sein. Denn fehlte z. B. $\varphi_1(x)$, so könnte nicht

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^{\,2}\, dx = \sum_{2}^{\infty} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \right\}^2$$

sein, denn rechts stehen lauter Nullen.

IV. Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im komplexen Gebiet.

§ 1. Lage der Singularitäten der Lösung.

w und z mögen zwei komplexe Variable bedeuten. Dann erklärt, wie wir schon von S. 108 wissen, die Differentialgleichung

$$f(w'', w', w, z) = 0 ,$$

in welcher $f(w'', w', w, z)$ eine analytische Funktion ihrer Argumente sein möge, eine zweiparametrige Schar analytischer Funktionen. Will man, ausgehend von der Differentialgleichung, die Natur dieser Lösungen untersuchen, so ist es eine *Hauptaufgabe, die Lage der singulären Stellen und nächstdem ihre Natur festzustellen.* Diese Aufgabe ist im allgemeinen recht kompliziert. Darauf deutet schon der Umstand hin, daß gewöhnlich die Lage der Singularitäten der Partikularintegrale von den Anfangswerten abhängt, durch welche dieselben festgelegt sind. Betrachtet man z. B. die zweiparametrige Schar von Funktionen

$$w = \frac{1}{z - \alpha} + \beta \quad (\alpha,\ \beta \text{ Scharparameter}),$$

so sieht man leicht, daß dieselben der Differentialgleichung

$$w''^{\,2} + 4\, w'^{\,3} = 0$$

genügen. Man kennt allgemein durch die Untersuchungen von *Painlevé*[1]) die Bedingungen, die bestehen müssen, wenn die Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung nur *feste*, also nicht mit den Anfangsbedingungen *verschiebbare* Verzweigungspunkte und wesentlich singuläre Stellen besitzen sollen. Doch wollen wir hier auf diese schönen, aber schwierigen Untersuchungen nicht näher eingehen, sondern uns mit der Feststellung begnügen, daß bei den *linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nur feste Singularitäten* auftreten. Das entnimmt man ohne weiteres dem Existenzbeweis, den wir S. 108 mit Hilfe der sukzessiven Approximationen geführt und den wir schon S. 139/140 fürs reelle Gebiet durch einige Bemerkungen ergänzt haben. Wir wiesen schon damals darauf hin, daß im Reellen das Verfahren in jedem x-Intervall konvergiert, in dem die Koeffizienten stetig sind. Jetzt gilt für die Differentialgleichung

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w + r(z) = 0$$

im komplexen Gebiet eine ganz analoge Aussage. Um sie präzis fassen zu können, führen wir den Begriff „*Stern der Differentialgleichung mit dem Mittelpunkt* $z = z_0$“ ein. Ich lege durch den Punkt $z = z_0$ in der komplexen z-Ebene eine beliebige Halbgerade. Im Punkte $z = z_0$ mögen die Koeffizienten bzw. ein Zweig derselben regulär sein. Ich setze dieselben längs der Halbgeraden fort, solange das für alle Koeffizienten auf einmal geht. Sowie ich aber an eine singuläre Stelle eines der Koeffizienten komme, halte ich ein. Die Strecke von $z = z_0$ bis zu diesem singulären Punkt gehört dann dem Stern an. Der Stern ist definiert als der Bereich, der von der Gesamtheit der erklärten Strecken gebildet wird. Sind die Koeffizienten mehrdeutig, so gehört zu jeder in $z = z_0$ regulären Zweigauswahl derselben ein solcher Stern. Wenn man nun, wie S. 140 angegeben, nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen diejenige Lösung der Differentialgleichung konstruiert, die an der Stelle $z = z_0$ den Wert $w = w_0$ besitzt und deren Ableitung $w'(z_0) = w_0'$ ist, so konvergiert der Prozeß im ganzen Inneren des eben eingeführten Sternes. Um das einzusehen, braucht man ja nur einen weiteren Punkt $z = z_1$ aus dem Sterninneren zu nehmen und die Konvergenz auf der Strecke $\overline{z_0 z_1}$ zu betrachten. Wenn der Leser von diesem Standpunkt aus das Verfahren erneut durchdenkt, so wird er sofort die Richtigkeit unserer Behauptung bestätigt finden. Es ist eine nützliche Übung für den Leser, dies ohne weitere Anleitung selbständig zu unternehmen[2]).

---

[1]) Man vgl. die Literaturangaben in der Enzyklopädie, Bd. II, 2, S. 590ff.

[2]) Man kann übrigens die Richtigkeit eines Teiles unserer Behauptung über lineare Differentialgleichungen aus dem entnehmen, was uns von S. 24 über die *Riccati*schen Differentialgleichungen bekannt ist.

Wir haben also den Satz: *An allen Stellen der z-Ebene, über welchen keine Singularitäten der Koeffizienten von* (1) *liegen, sind die sämtlichen Lösungen dieser Differentialgleichung regulär.*

An den singulären Stellen der Koeffizienten selbst können Singularitäten der Lösungen auftreten. Es kann aber auch geschehen, daß einzelne Lösungen da noch regulär sind. Insofern erweisen sich auch hier die Singularitäten noch als beweglich. Auch ist die Natur der Singularitäten für die einzelnen Lösungen verschieden. Fest sind die Singularitäten nur insofern, als nur über einer ganz bestimmten Kategorie von z-Stellen Singularitäten liegen können.

Über die Natur der Singularitäten kann man auch relativ leicht Aufschluß gewinnen. Das soll im folgenden Paragraphen geschehen. Es genügt, wenn wir dabei nur auf die homogenen Differentialgleichungen achten, weil wir ja seit S. 121 wissen, wie man die Integration der inhomogenen Differentialgleichung auf die der homogenen zurückführen kann.

§ 2. Die Natur der Singularitäten.

Wir betrachten nur isolierte Singularitäten der Koeffizienten. Hier dürfen wir uns auf solche beschränken, in deren Umgebung die Koeffizienten eindeutig sind. Denn die Mehrdeutigkeit kann man bekanntlich durch Einführung geeigneter uniformisierender Parameter auf Eindeutigkeit zurückführen. Es mögen also in der Umgebung von $z = \zeta$ die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0 \tag{1}$$

eindeutig und regulär sein. Im Punkte $z = \zeta$ selbst soll aber für einen oder für beide die Regularität aufhören. Betrachten wir nun irgendein Fundamentalsystem $w_1(z)$ und $w_2(z)$ der Differentialgleichung und sehen zu, wie sich die Funktionen beim Umlauf um die singuläre Stelle ändern. Ich schlage um $z = \zeta$ einen Kreis, in dem die Koeffizienten mit Ausnahme der Stelle $z = \zeta$ keine weiteren Singularitäten haben sollen. $z = z_0$ sei eine Stelle in diesem Kreis. Ich betrachte zwei zum Punkte z_0 gehörige Funktionselemente $\mathfrak{P}_1(z - z_0)$ und $\mathfrak{P}_2(z - z_0)$ des Fundamentalsystems $w_1(z), w_2(z)$ und setze diese beiden Elemente längs eines Weges fort, der $z = \zeta$ einmal im positiven Sinne umschließt. Dadurch entstehen aus den Ausgangselementen zwei neue Elemente, deren Quotient nicht konstant ist, die also auch ein Fundamentalsystem ausmachen. Da man alle Lösungen aus dem Fundamentalsystem durch Kombination mit konstanten Koeffizienten erhält, so erfährt jedes Fundamentalsystem beim Umlauf um die singuläre Stelle eine lineare Substitution

$$\begin{aligned} W_1(z) &= a\,w_1 + l\,w_2 \\ W_2(z) &= c\,w_1 + d\,w_2 . \end{aligned}$$

Wenn erst einmal für ein Fundamentalsystem diese Umlaufssubstitution bekannt ist, so kann man aus ihr entnehmen, welchen Einfluß ein Umlauf um die singuläre Stelle auf irgendeine andere Lösung

$$w(z) = \alpha w_1 + \beta w_2$$

besitzt. Sie geht nämlich durch den Umlauf in

$$\alpha(aw_1 + bw_2) + \beta(cw_1 + dw_2)$$

über. Man kann nun stets mindestens eine Lösung auswählen, die sich beim Umlauf um die Stelle mit einem Faktor multipliziert. Dazu hat man ja nur die α, β so zu wählen, daß

$$\alpha(aw_1 + bw_2) + \beta(cw_1 + dw_2) = \lambda(\alpha w_1 + \beta w_2) \tag{2}$$

ist. Dabei ist λ ein noch zu bestimmender Faktor. Schreibt man die Gleichung anders, so lautet sie

$$w_1(\alpha(a - \lambda) + \beta c) + w_2(\alpha b + \beta(d - \lambda)) = 0\,.$$

Da aber w_1 und w_2 ein Fundamentalsystem bilden, so kann sie nur dann erfüllt sein, wenn

$$\begin{aligned} \alpha(a - \lambda) + \beta c &= 0 \\ \alpha b + \beta(d - \lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ist. Sollen aber diese beiden Gleichungen durch Werte α und β lösbar sein, die nicht beide verschwinden, so muß λ eine Wurzel von

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

sein. Bestimmt man λ aus dieser Gleichung und trägt einen der gefundenen Werte in (3) ein, so kann man aus diesen Gleichungen die α, β bestimmen und erhält damit diejenigen Lösungen, die beim Umlauf sich nur mit einem Faktor multiplizieren. Es wird *zwei* solche Lösungen geben, wenn die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der *Fundamentalgleichung* (4) *verschieden* sind. Diese beiden Funktionen machen dann selbst ein Fundamentalsystem aus, denn ihr Quotient kann dann nicht konstant sein.

Wir wollen noch einen Augenblick bei diesem Fall stehen bleiben und uns die Gestalt dieser multiplikativen Lösungen noch etwas näher überlegen. Die Funktion

$$(z - \zeta)^{\frac{\log \lambda_1}{2\pi i}} \equiv (z - \zeta)^{r_1} \quad \left(r_1 = \frac{\log \lambda_1}{2\pi i}\right) \tag{5}$$

multipliziert sich ebenfalls mit dem Faktor λ_1, wenn z die Stelle ζ umläuft. Wenn also ein Element von $w_1(z)$ sich beim Umlauf auch mit λ_1 multipliziert, so ist

$$\frac{w_1(z)}{(z - \zeta)^{r_1}}$$

in der Umgebung von $z = \zeta$ eindeutig und kann also in der Um-

gebung dieser Stelle in eine *Laurent*-Reihe entwickelt werden. Daher hat jede multiplikative Lösung die Gestalt

$$(z-\zeta)^{r_1} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (z-\zeta)^\nu .$$

Wie man aber, ausgehend von der Differentialgleichung, die Exponenten r und die Koeffizienten der *Laurent*-Reihe wirklich ermittelt, wird im nächsten Paragraphen darzulegen sein.

Jetzt wollen wir uns den Fall, daß die *Fundamentalgleichung zwei gleiche Wurzeln* besitzt, etwas näher ansehen. Man wird dann im allgemeinen nur eine multiplikative Lösung zur Verfügung haben. Tatsächlich zeigt die nähere Betrachtung, daß in die anderen Lösungen dann im allgemeinen ein Logarithmus eingeht. Um das einzusehen, wähle ich ein passendes Fundamentalsystem. Als erste Funktion eines solchen nehme ich nämlich die eine sicher vorhandene multiplikative Lösung. Die andere lasse ich beliebig. Dann erfährt das neu gewählte Fundamentalsystem beim Umlauf eine Substitution dieser Art:

$$\begin{aligned} W_1 &= \lambda_1 w_1 \\ W_2 &= c w_1 + d w_2 . \end{aligned}$$

Frage ich hier wieder nach den multiplikativen Lösungen, so müssen das natürlich die gleichen sein wie bisher. D. h. die zur neuen Substitution gehörige Fundamentalgleichung muß auch zwei gleiche Wurzeln haben. Sonst gäbe es zwei Lösungen mit verschiedenen Multiplikatoren, und die hätten sich dann auch schon aus der ersten Fundamentalgleichung ergeben müssen. Die neue Fundamentalgleichung wird aber

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Damit ihre beiden Wurzeln λ_1 sind, muß $d = \lambda_1$ sein. Unser Fundamentalsystem erfährt also die folgende Umlaufssubstitution

$$\begin{aligned} W_1 &= \lambda_1 w_1 \\ W_2 &= c w_1 + \lambda_1 w_2 . \end{aligned}$$

Der Quotient

$$\frac{w_2}{w_1}$$

hat daher diese Umlaufssubstitution

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{c}{\lambda_1} .$$

Er erfährt also beim Umlauf einen Zuwachs um $\frac{c}{\lambda_1}$, genau wie

$$\frac{c}{\lambda_1 \cdot 2\pi i} \log (z-\zeta) .$$

Daher ist die Differenz

$$\frac{w_2}{w_1} - \frac{c}{\lambda_1 2\pi i}\log(z-\zeta)$$

in der Umgebung der singulären Stelle eindeutig und kann somit wieder in eine *Laurent*-Reihe entwickelt werden. Daher besitzt w_2 diese Gestalt

$$(z-\zeta)^{r_1}\{A\cdot\log(z-\zeta)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}a_\nu(z-\zeta)^\nu+\sum_{-\infty}^{+\infty}b_\nu(z-\zeta)^\nu\}.$$

Somit haben wir den folgenden *Satz:*

Man kann in der Umgebung einer singulären Stelle ein Fundamentalsystem stets so wählen, daß seine Lösungen in der Umgebung der singulären Stelle entweder Entwicklungen von der Form

$$(6a)\qquad \begin{cases} w_1 = (z-\zeta)^{r_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_\nu(z-\zeta)^\nu \\ w_2 = (z-\zeta)^{r_2}\sum_{-\infty}^{+\infty}b_\nu(z-\zeta)^\nu \end{cases}$$

oder *Entwicklungen von der Form*

$$(6b)\qquad \begin{cases} w_1 = (z-\zeta)^{r_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_\nu(z-\zeta)^\nu \\ w_2 = (z-\zeta)^{r_1}\{A\log(z-\zeta)\sum_{-\infty}^{+\infty}a_\nu(z-\zeta)^\nu+\sum_{-\infty}^{+\infty}b_\nu(z-\zeta)^\nu\} \end{cases}$$

besitzen.

Wie bestimmt man nun r_1, r_2, A und die Koeffizienten der *Laurent*-Reihen aus der Differentialgleichung? Bevor wir dazu übergehen, wird es nützlich sein, noch ein Wort über das Verhalten der Lösungen im Unendlichen zu sagen. Um im Unendlichen eine Funktion zu untersuchen, hat man erst

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

einzuführen. Durch diese Substitution geht die Differentialgleichung (1) in die folgende über:

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}+\frac{dw}{d\zeta}\left[\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta^2}p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]+\frac{1}{\zeta^4}q\left(\frac{1}{\zeta}\right)w=0.$$

Ihre Lösungen hat man dann in der Umgebung von $\zeta=0$ zu betrachten.

§ 3. Außerwesentliche und wesentliche Singularitäten.

Wenn die in den Lösungen des vorigen Paragraphen vorkommenden *Laurent*-Reihen höchstens endlich viele negative Potenzen enthalten, so wollen wir sagen, es liege eine *außerwesentliche Singularität* der Differentialgleichung, enthält aber auch nur eine derselben un-

endlich viele negative Potenzen, so sagen wir, es liege eine *wesentliche Singularität* der Differentialgleichung vor. Statt „außerwesentlich singuläre Stelle", sagt man auch „Stelle der Bestimmtheit", weil dann die Lösungen bei Annäherung an diese Stelle bestimmten Grenzwerten zustrebt.

Wenn eine Differentialgleichung an der Stelle $z = a$ nur eine außerwesentliche Singularität besitzen soll, so müssen die Koeffizienten gewissen Bedingungen genügen, die wir jetzt angeben wollen, um alsdann die im vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe für die außerwesentlichen Singularitäten zu lösen.

Nehmen wir also an, die *Laurent*-Reihen enthielten nur endlich viele negative Potenzen. Dann bilden wir den Quotienten $\frac{w_2}{w_1}$. Da aber das reziproke einer *Laurent*-Reihe mit endlich vielen negativen Potenzen sich als Potenzreihe mit nur positiven Potenzen darstellen läßt, so läßt sich $\frac{w_2}{w_1}$ so schreiben

$$(1)\quad \frac{w_2}{w_1} = (z-a)^{r_2-r_1}\left\{A\log(z-a) + (z-a)^{\nu}\,\mathfrak{P}(z-a)\right\}\,(\mathfrak{P}(0) \neq 0),$$

wo ν eine passende negative ganze Zahl ist und wo mit $\mathfrak{P}(z-a)$ weiterhin stets eine nur positive Potenzen enthaltende Potenzreihe bezeichnet werden soll. Das Glied mit dem Logarithmus kann dabei evtl. wegfallen. Steht es da, so ist überdies $r_2 = r_1$ zu nehmen. Nun wissen wir aber von S. 120 her, daß man mit Hilfe irgend zweier Partikularlösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0$$

für $p(z)$ die Darstellung hat

$$(2)\qquad p(z) = -\frac{w_2''\,w_1 - w_1''\,w_2}{w_2'\,w_1 - w_1'\,w_2} = -\frac{d}{dz}\left\{\log\left[w_1^{\,2}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right]\right\}.$$

Nun aber rechnet man aus

$$(3)\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = (r_2-r_1)(z-a)^{r_2-r_1-1}\left\{A\log(z-a) + (z-a)^{\nu}\,\mathfrak{P}(z-a)\right\}$$
$$+ (z-a)^{r_2-r_1}\left\{\frac{A}{z-a} + \nu(z-a)^{\nu-1}\,\mathfrak{P}(z-a) + (z-a)^{\nu}\,\mathfrak{P}'(z-a)\right\}$$

$$(4)\qquad w_1^{\,2} = (z-a)^{r_1+\mu}\,\mathfrak{P}_4(z-a)\ (\mathfrak{P}_4(0) \neq 0)^{1}).$$

In (3) kommt nun aber tatsächlich kein Logarithmus vor. Denn entweder ist $A = 0$, oder es ist $r_1 = r_2$. Daher hat $\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)$ die Gestalt

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w}\right) = (z-a)^{\lambda}\cdot\mathfrak{P}(z-a).$$

[1]) μ ist also eine passende ganze Zahl.

Also besitzt sowohl die logarithmische Ableitung von (3) wie die von (4) bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung. Somit hat auch $p(z)$ bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung.

Aus der Gleichung

$$w_1'' + p(z)\, w_1' + q(z)\, w_1 = 0$$

gewinnt man

$$q(z) = -\frac{w_1''}{w_1} - p(z)\frac{w_1'}{w_1}.$$

Nun ist aber

$$w_1 = (z-a)^{r_1+\lambda} \cdot \mathfrak{P}(z-a).$$

Daher hat $\frac{w_1'}{w_1}$ bei $z = a$ einen Pol von höchstens erster Ordnung, während der von $\frac{w_1''}{w_1}$ höchstens die zweite Ordnung hat. Daher hat auch $q(z)$ einen Pol von höchstens zweiter Ordnung.

So hat man den Satz: *Wenn die Differentialgleichung*

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

an der Stelle $z = a$ nur Lösungen mit außerwesentlichen Singularitäten besitzt, so muß sie in der Umgebung von $z = a$ die Gestalt

$$(5) \qquad w'' + \frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{z-a}w' + \frac{\mathfrak{P}_2(z-a)}{(z-a)^2}w = 0$$

haben. D. h. der erste Koeffizient hat dort einen Pol von höchstens erster Ordnung, der zweite Koeffizient einen Pol von höchstens zweiter Ordnung.

Daß die hier für eine Stelle der Bestimmtheit gefundene Bedingung auch hinreichend ist, hat *Fuchs* durch Aufstellung der Potenzreihenentwicklung der Lösungen bewiesen. Man sieht es aber nach einem von *Schlesinger* und in besonders einfacher Form von *Birkhoff*[1]) herrührenden Verfahren am schnellsten so ein: Man führe die Differentialgleichung (5) durch die Substitution $w_1 = w$, $w_2 = (z-a)w'$ in das System

$$w_1' = \frac{w_2}{z-a}, \quad w_2' = w_2\frac{(1-\mathfrak{P}_1)}{z-a} - \frac{w_1\,\mathfrak{P}_2}{z-a}$$

über. Seine Koeffizienten, das sind die Faktoren, mit denen w_1 und w_2 multipliziert sind, haben nur Pole erster Ordnung und somit gibt es eine Zahl $M > 1$, so daß in der Umgebung $|z-\zeta| \leqq r_0$ dieser Stelle die Koeffizienten unter $\frac{M}{|z-a|}$ bleiben. Daher hat man

$$|w_1'| < \frac{M}{|z-a|}(|w_1| + |w_2|), \quad |w_2'| < \frac{M}{|z-a|}(|w_1| + |w_2|).$$

[1]) Man vgl. *G. D. Birkhoff:* Trans. of the Am. math. Soc. 11 (1910).

Setzt man nun $W = |w_1|^2 + |w_2|^2$, so ist weiter für $|z-a| = r$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial r}\right| \leqq 2\{|w_1|\,|w_1'| + |w_2|\,|w_2'|\} \leqq \frac{4M}{r} W.$$

Also ist

$$-\frac{4M}{r} \leqq \frac{\partial \log W}{\partial r} \leqq \frac{4M}{r}$$

und daraus

$$W \leqq W_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-4M} \qquad (0 < r < r_0)$$

Daraus folgt sofort, daß für genügend kleine r auch $|w_1| < W_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-4M}$ ist. D. h. also: Das Produkt

$$|w_1|\,|z-a|^{4M}$$

bleibt in der Umgebung von $z = a$ unter einer festen Schranke und daher können in der Entwicklung von w_1 nach Potenzen von $z-a$ nur endlich viele negative Potenzen auftreten, so daß also eine außerwesentlich singuläre Stelle vorliegt.

§ 4. Auflösung einer Differentialgleichung in der Nähe einer außerwesentlichen singulären Stelle.

Die weitere Aufgabe der Theorie ist es nun, über das Verhalten der Lösungen in der Nähe einer außerwesentlichen oder einer wesentlichen Singularität näheren Aufschluß zu gewinnen. Wir werden uns in diesem Buche auf die ausführliche Behandlung der außerwesentlich singulären Stelle beschränken und am Schlusse dieses Paragraphen nur kurz über die entsprechenden Verhältnisse bei wesentlich singulären Stellen referieren.

Zur wirklichen Berechnung der Lösungen bedient man sich der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Es liege also bei $z = a$ eine außerwesentlich singuläre Stelle vor.

Ich schreibe die Differentialgleichung so:

$$\mathfrak{L}(w) \equiv (z-a)^2 w'' + (z-a)\mathfrak{P}_1(z-a)w' + \mathfrak{P}_2(z-a)w = 0$$

und setze

$$\mathfrak{P}_1(z-a) = \sum \alpha_i (z-a)^i, \quad \mathfrak{P}_2(z-a) = \sum \beta_i (z-a)^i$$

und bilde zunächst

$$\mathfrak{L}(z-a)^\lambda = (z-a)^\lambda \cdot f(z, \lambda).$$

Hier ist

$$f(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda)(z-a)^k$$

und man hat

$$f_0(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda\alpha_0 + \beta_0$$
$$f_k(\lambda) = \lambda\alpha_k + \beta_k \qquad k = 1, 2 \ldots$$

Geht man also nun in die Differentialgleichung mit dem Ansatz

$$w = (z-a)^{\varrho} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{\nu} (z-a)^{\nu}$$

hinein, so erhält man eine gewisse *Laurent*-Reihe, die verschwinden muß. Dazu ist notwendig, daß ihre sämtlichen Koeffizienten verschwinden. Das führt auf die unendlich vielen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_k f_0(\varrho+k) + \ldots + c_0 f_k(\varrho+k) + c_{-1} f_{k+1}(\varrho+k) + \ldots = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(1)\qquad &c_1 f_0(\varrho+1) + c_0 f_1(\varrho+1) + c_{-1} f_2(\varrho-k) + c_{-3} f_3(\varrho+1) \ldots = 0\\
&c_0 f_0(\varrho) + c_{-1} f_1(\varrho) + c_{-2} f_2(\varrho) + \ldots = 0\\
&c_{-1} f_0(\varrho-1) + c_{-2} f_1(\varrho-1) + \ldots = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

mit den unendlich vielen Unbekannten $\ldots c_{-k} \ldots c_{-1}\, c_0\, c_1\, c_2 \ldots$. Die Gleichungen sind nur wenig einfacher als die, welche man erhalten hätte, wenn man für die Koeffizienten der Differentialgleichung bei $z = a$ beliebige eindeutige isolierte Singularitäten zugelassen hätte. Man ist auch tatsächlich imstande, solche Gleichungssysteme aufzulösen. Wir wollen darauf aber nicht eingehen, sondern verweisen den interessierten Leser auf zwei Abhandlungen von *Koch* in den Acta mathematica Bd. 16 und 17. Hier beschränken wir uns auf die außerwesentlich singuläre Stelle; wir dürfen daher den Ansatz in

$$w = (z-a)^{\varrho} \cdot \sum_{0}^{\infty} c_{\nu} (z-a)^{\nu}$$

abändern[1]). Setzt man also in den linearen Gleichungen die c_{-1}, $c_{-2} \ldots$ alle Null, so werden die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&c_0 f_0(\varrho) = 0,\\
&c_1 f_0(\varrho+1) + c_0 f_1(\varrho+1) = 0,\\
&c_2 f_0(\varrho+2) + c_1 f_1(\varrho+2) + c_0 f_2(\varrho+2) = 0.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Wir werden sie auflösen und auch ϱ bestimmen. Wählt man nämlich ϱ so, daß

$$(2)\qquad f_0(\varrho) \equiv \varrho(\varrho-1) + \varrho\alpha_0 + \beta_0 = 0$$

ist und läßt c_0 willkürlich, so kann man aus der zweiten Gleichung c_1 berechnen, dann aus der dritten c_2 usw., es sei denn, daß für das gewählte ϱ und eine der ganzen positiven Zahlen k auch ein $f_0(\varrho+k) = 0$ wird. Dies ist dann der Fall, wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (2) sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Sollte dies einmal

---

[1]) Die endlich vielen negativen Potenzen können durch geeignete Wahl des Exponenten ϱ berücksichtigt werden.

eintreten, so verwende man diejenige der beiden Wurzeln ϱ, welche den größten Realteil hat. Für diese gelingt dann die Bestimmung der c_k.

Wir haben so scheinbar unsere Aufgabe gelöst und aufs neue erkannt, daß Differentialgleichungen von der im vorigen Paragraphen bestimmten Gestalt tatsächlich bei $z = a$ nur eine außerwesentliche Singularität aufweisen. Aber es bleibt noch eine Lücke: Konvergiert denn auch die gefundene Reihe? Dies verstünde sich nach den allgemeinen Resultaten von S. 175/176 von selbst, wenn wir hätten zeigen können, daß die eben gefundenen Lösungen c_k die einzigen Lösungen der Gleichungen (1) sind. Aber gerade das ist nicht geschehen und auch nicht immer der Fall. Es bleibt uns somit nichts weiter übrig, als den Konvergenzbeweis direkt zu erbringen. Da

$$f_0(\varrho + n) = (\varrho + n)(\varrho + n - 1) + (\varrho + n)\alpha_0 + \beta_0$$

ist, so hat man von einem gewissen $n = N$ an:

$$|f_0(\varrho + n)| > |\varrho| + n.$$

Daher ist von $n = N$ an

$$(|\varrho| + n)|c_n| < |c_{n-1}||f_1(\varrho + n)| + |c_{n-2}||f_2(\varrho + n)| + \ldots + c_0||f_n(\varrho + n)|.$$

Also

$$|c_n| < |c_{n-1}|[|\alpha_1| + |\beta_1|] + |c_{n-2}|[|\alpha_2| + |\beta_2|] + \ldots + |c_0|[|\alpha_n| + |\beta_n|].$$

Aus den N ersten Gleichungen ergeben sich gewisse Werte $c_1, c_2 \ldots c_{N-1}$. Man wähle N positive Zahlen $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{N-1}$ irgendwie so, daß

$$|c_0| < d_0, |c_1| < d_1, |c_2| < d_2, \ldots, |c_{N-1}| < d_{N-1}$$

gilt. Nun bestimme man unendlich viele positive Zahlen $d_N, d_{N+1}, \ldots$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} d_N &= d_{N-1}\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} + d_{N-2}\{|\alpha_2| + |\beta_2|\} + \ldots + d_0\{|\alpha_N| + |\beta_N|\} \\ &\vdots \\ d_n &= d_{n-1}\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} + d_{n-2}\{|\alpha_2| + \beta_2|\} + \ldots + d_0\{|\alpha_n| + |\beta_n|\}. \end{aligned} \tag{3}$$

. . . . . .

Dann hat man auch

$$|c_N| < d_N, \; |c_{N+1}| < d_{N+1}, \ldots$$

Wenn man nun zeigen kann, daß die Reihe

$$\sum d_n(z - a)^n$$

in einem gewissen Kreis um $z = a$ konvergiert, so gilt das bekanntlich auch für die Reihe

$$\sum c_n(z - a)^n.$$

Setzt man nun noch

$$\begin{aligned} b_0 &= d_0 \\ b_1 &= d_1 - d_0\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} \\ &\vdots \\ b_{N-1} &= d_{N-1} - d_{N-2}\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} - \ldots - d_0\{|\alpha_{N-1}| + |\beta_{N-1}|\} \end{aligned} \tag{4}$$

und entwickelt den Quotienten

$$\frac{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots + b_{N-1}(z-a)^{N-1}}{1 - (|\alpha_1| + |\beta_1|)(z-a) - \ldots - (|\alpha_n| + |\beta_n|)(z-a)^n \ldots}$$

nach Potenzen von $z - a$, so erhält man eine Potenzreihe

$$e_0 + e_1(z-a) + \ldots + e_n(z-a)^n + \ldots .$$

Für ihre Koeffizienten erhält man aber die Gleichungen

$$\begin{aligned}
b_0 &= e_0 \\
b_1 &= e_1 - e_0\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} \\
&\vdots \\
b_{N-1} &= e_{N-1} - e_{N-2}\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} - \ldots - e_0\{|\alpha_{N-1}| + |\beta_{N-1}|\} \\
0 &= e_N - e_{N-1}\{|\alpha_1| + |\beta_1|\} - \ldots - e_0\{|\alpha_N| + |\beta_N|\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Das sind aber gerade die Gleichungen (3) und (4), welchen die d_n genügen. Daher gilt

$$e_n = d_n \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

Nachdem wir so gezeigt haben, daß durch die gefundene Reihe ein Element der Lösung dargestellt wird, steht natürlich aus allgemeinen funktionentheoretischen Gründen fest, daß der Konvergenzkreis der Reihe bis zum nächsten singulären Punkt reicht. Die Gleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho\alpha_0 + \beta_0 = 0,$$

aus welcher wir ϱ bestimmten, heißt die *Fundamentalgleichung*. Wenn dieselbe zwei Wurzeln hat, deren *Differenz keine ganze Zahl* ist, so liefert unsere Betrachtung gleich die beiden Lösungen eines Fundamentalsystems. Unterscheiden sich aber die beiden Wurzeln um eine ganze Zahl, so erhalten wir nur eine Lösung. Dieselbe ist durch diejenige der beiden Wurzeln bestimmt, welche den größten Realteil besitzt. Die bedeutsame Rolle, die hier die Wurzeln spielen, deren Differenz eine ganze Zahl ist, kann nicht überraschen. Denn von S. 177 her wissen wir ja schon, daß die Exponenten nur bis auf ganze Zahlen bestimmt sind. Dem trugen wir auch schon Rechnung, indem wir die Lösung in der Form

$$w = (z-a)^{\varrho}\,\mathfrak{P}(z-a)$$

ansetzten.

Wenn nun also die Differenz der Wurzeln eine ganze Zahl ist, so wird es sich darum handeln, eine weitere Lösung zu finden, die mit der schon bekannten zusammen ein Fundamentalsystem bildet. Die Mittel dazu stehen seit S. 120 bereit, denn damals lernten wir schon durch Kenntnis einer Lösung die Ordnung der Differentialgleichung reduzieren. Wir lernten:

Wenn w_1 eine Lösung der Differentialgleichung

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0$$

ist, und wenn man $w = w_1 \int u\,dz$ setzt, so genügt u der linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$u' + u\left(\frac{z\,w_1'}{w_1} + p\right) = 0.$$

Tragen wir hier

$$w_1 = (z-a)^{\varrho_1}\,\mathfrak{P}(z-a), \quad p = \frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{z-a} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1(z-a) + \dots}{z-a}$$

ein, so wird die Gleichung

$$u' + u\left(\frac{2\,\varrho_1 + \alpha_0}{z-a} + \mathfrak{P}_3(z-a)\right) = 0.$$

Bezeichnet man die zweite „kleinere" Wurzel der Fundamentalgleichung (2) mit ϱ_2, so kann man hierfür schreiben:

$$u' + u\left(\frac{1 + \varrho_1 - \varrho_2}{z-a} + \mathfrak{P}_3(z-a)\right) = 0.$$

Hier ist aber, wegen der Wahl von ϱ_1

$$\varrho_1 - \varrho_2$$

und damit auch

$$1 + \varrho_1 - \varrho_2 = \nu$$

eine positive ganze Zahl. Aus der Gleichung für u findet man sofort

$$u = (z-a)^{-\nu}\,\mathfrak{P}_4(z-a).$$

Somit wird die andere Lösung des Fundamentalsystems

$$\begin{aligned} w &= w_1 \int u\,dz = w_1\left\{A\log(z-a) + (z-a)^{-\nu+1}\,\mathfrak{P}_5(z-a)\right\} \\ &= (z-a)^{\varrho_1}\cdot A\cdot\log(z-a)\cdot\mathfrak{P}(z-a) + (z-a)^{\varrho_2}\cdot\mathfrak{P}_5(z-a). \end{aligned}$$

Wir können das Resultat so aussprechen:

ϱ_1 und ϱ_2 seien die beiden Wurzeln der Fundamentalgleichung (2). *Es möge* $\Re(\varrho_1) \geqq \Re(\varrho_2)$ *sein. Dann besitzt die Differentialgleichung*

$$w'' + w'\,\frac{\mathfrak{P}_1(z-a)}{z-a} + w\,\frac{\mathfrak{P}_2(z-a)}{(z-a)^2} = 0$$

in der Umgebung von $z = a$ stets ein Fundamentalsystem von der Gestalt

$$\begin{aligned} w_1 &= (z-a)^{\varrho_1}\,\mathfrak{P}(z-a) \\ w_2 &= (z-a)^{\varrho_1}\cdot A\cdot\log(z-a)\cdot\mathfrak{P}(z-a) + (z-a)^{\varrho_2}\,\mathfrak{P}^*(z-a). \end{aligned}$$

Wenn die Differenz $\varrho_1 - \varrho_2$ keine ganze Zahl ist, so fällt stets das mit dem Logarithmus behaftete Glied weg. Man hat dann die Konstante A gleich Null zu setzen. Wenn aber die Differenz $\varrho_1 - \varrho_2$ eine ganze Zahl ist, dann ist im allgemeinen A von Null verschieden. Der Konvergenzkreis der beiden hier vorkommenden Potenzreihen reicht bis zum nächsten singulären Punkt.

Bemerkung: Es kann sehr wohl der Fall eintreten, daß an einer singulären Stelle der Differentialgleichung alle Lösungen regulär sind. Das trifft z. B. bei $z = 0$ für

$$w'' - w' \frac{2}{z} + w \frac{2}{z^2} = 0$$

zu. Denn ein Fundamentalsystem derselben ist

$$w_1 = z,$$
$$w_2 = z^2.$$

Eine singuläre Stelle, in der sich alle Integrale regulär verhalten, nennt man einen *Nebenpunkt.*

Nun berichte ich kurz über die Ergebnisse, welche bei wesentlich singulären Stellen erzielt worden sind. Den Anschluß an das vorhergehende gewinnt man durch die Frage, ob es nicht auch im Falle wesentlich singulärer Stellen einzelne Integrale gibt, die sich in deren Umgebung bestimmt verhalten, die sich also durch eine Reihe $(z - a)^\varrho \cdot \mathfrak{P}(z - a)$ darstellen lassen. Man kennt aus Arbeiten von *H. v. Koch* und *Perron*[1]) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein solcher Integrale. Aber man bekommt so eben nur in seltenen Fällen Aufschluß über ein oder das andere Integral. Einen Schritt weiter kommt man durch die *Thomé*schen Normalreihen[2]). Man geht nämlich mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung hinein:

$$y = e^{g(z)} u.$$

Dabei wird schon angenommen, daß der singuläre Punkt im Unendlichen liegt. Das ist ja auch keine Beschränkung der Allgemeinheit. In dem Ansatz bedeutet $g(z)$ ein Polynom; dies ist so zu bestimmen, daß für u eine Differentialgleichung herauskommt, der man durch eine Reihe

$$u = z^\varrho \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

formal genügen kann. Aber auch nur formal, denn die Reihen divergieren im allgemeinen. Trotzdem liefern diese Reihen, welche also die Form

$$e^{g(z)} \cdot z^\varrho \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

haben, gewissen Aufschluß über das Verhalten der Lösungen in der Nähe der wesentlich singulären Stelle. Sie sind nämlich *asymptotische Darstellungen* derselben bei zunächst geradliniger Annäherung.

---

[1]) *H. v. Koch:* Acta math., Bd. 18. *O. Perron:* Math. Ann. 70. *E. Hilb:* Math. Ann. 82.

[2]) *Crelle's* Journal von Bd. 83 an.

Damit ist folgendes gemeint. Zu jeder Normalreihe

$$e^{g(z)} \cdot z^{\varrho} \left(c_0 + c_1 \frac{1}{z} + \dots \right)$$

gehört ein Integral y derart, daß für jedes m

$$y = e^{g(z)} \cdot z^{\varrho} \left(c_0 + \dots + \frac{c_m}{z^m} + \frac{\varepsilon_m}{z^m} \right)$$

ist, wo $\varepsilon_m \to 0$ für $m \to \infty$. Diesen Satz hat *Poincaré* für den Fall bewiesen, daß die Koeffizienten der zu behandelnden Differentialgleichung

$$p_0(z)\, w'' + p_1(z)\, w' + p_2(z)\, w = 0$$

ganze rationale Funktionen sind. Für diesen Fall kann man auch noch eine einfache Aussage über die Bestimmung von $g(z)$ machen. Es werde angenommen, daß die Grade der $p_i : h + i\,k$ seien. Dann sei C_i der Koeffizient von z^h in p_i und man betrachte die Gleichung

$$C_0 \alpha^2 + C_1 \alpha + C_2 = 0 .$$

Sind ihre Wurzeln alle voneinander verschieden und bezeichnet man dieselben mit α_k, so gibt es genau zwei Normalreihen, deren exponentielle Bestandteile die $e^{\alpha_k \cdot z}$ sind, die also so aussehen

$$e^{\alpha_k z} z^{\varrho}\, \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Der Zusammenhang mit den durch die Reihen asymptotisch dargestellten Integralen wird in diesem Falle durch den folgenden Satz von *Poincaré* hergestellt. Zu jedem α_k gehört genau ein Integral y_k, für das die Beziehung gilt:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{y_k'}{y_k} = \alpha_k .$$

Was nun aber allgemeinere Differentialgleichungen mit nichtrationalen Koeffizienten anlangt, so sind zu ihrer Behandlung zwei Schritte nötig. Einmal übertrage man — was keine sonderliche Mühe macht — die hier geschilderten Dinge auf Systeme von zwei linearen Gleichungen erster Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen und mit rationalen Koeffizienten. Als deren Spezialfall hat man ja bekanntlich die Gleichungen zweiter Ordnung aufzufassen. Dann aber wird der Anschluß an diese Übertragung durch einen grundlegenden Satz von *Birkhoff* erzielt, der lehrt, daß man jede Gleichung zweiter Ordnung (oder allgemeiner jedes System) durch eine lineare Transformation

$$Y_i = \alpha_{i1} \cdot y + \alpha_{i2}\, y' \qquad (i = 1, 2)$$

auf ein System mit im ∞ regulären Koeffizienten transformieren kann. Wegen der einzelnen Zitate verweise ich auf den Enzyklopädieartikel von *Hilb*.

§ 5. Anwendung auf die *Bessel*sche Differentialgleichung.

Die *Bessel*sche Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \frac{z^2 - n^2}{z^2} w = 0$$

besitzt bei $z = 0$ eine außerwesentlich singuläre Stelle. Die Fundamentalgleichung wird:

$$\varrho(\varrho - 1) + \varrho - n^2 = 0 .$$

Ihre beiden Wurzeln sind somit

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= n \\ \varrho_2 &= -n \end{aligned} \qquad (\text{wenn } \Re(n) > \Re(-n)).$$

Schon diese kurze Bemerkung lehrt nach einem Blick auf die Formeln des vorigen Paragraphen, daß es, falls nicht gerade n rein imaginär ist, tatsächlich stets nur eine Lösung (die erste oben aufgeschriebene) gibt, welche bei $z = 0$ endlich bleibt. Damit haben wir eine Frage beantwortet, die wir auf S. 103 vertagt hatten.

Es wird eine nützliche Übung für den Leser sein, das folgende Ergebnis selbständig zu gewinnen:

Wenn n keine ganze Zahl ist, dann sind $J_n(z)$ und $J_{-n}(z)$ die beiden Lösungen eines Fundamentalsystems. Wenn aber n eine ganze Zahl ist, dann verliert $J_{-n}(z)$ seinen Sinn, weil einige seiner Koeffizienten unendlich werden. Alsdann wird die zweite Lösung des Fundamentalsystems:

$$\begin{aligned} &J_n(z) \cdot \log z \\ &- \left\{ 2^{n-1}(n-1)!\, z^{-n} + \frac{2^{n-3}(n-2)!\, z^{-n+2}}{1!} + \frac{2^{n-5}(n-3)!\, z^{-n+4}}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-2}}{2^{n-1}(n-1)!} \right\} \\ &+ \sum_1^{\infty} \left[\frac{(-1)^{m-1} z^{n+2m}}{2^{n+2m} m!\,(n+m)!} \cdot \sum_1^{m} \left\{ \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2n+2\mu} \right\} \right] . \end{aligned}$$

Ich will dem Leser zur Herleitung dieses letzten Ergebnisses eine auch sonst nützliche Anleitung geben. Wenn wir nach der im vorigen Paragraphen verwendeten Methode rechnen wollten, so hätten wir die Unbequemlichkeit, erst den Quotienten $\frac{J_n'(z)}{J_n(z)}$ in eine Potenzreihe entwickeln zu müssen. Das vermeidet man, wenn man in die Gleichung mit dem durch unser allgemeines Resultat nahegelegten Ansatz

$$w_2 = z^n \cdot \sum (a_m + b_m \log z)\, z^m$$

hineingeht. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten liefert dann leicht das gewünschte Ergebnis. Wir haben diese Methode nicht im vorigen Paragraphen angewandt, weil wir sonst die Rechnung wieder durch einen Konvergenzbeweis hätten ergänzen müssen. Der ergab sich bei der Betrachtung des vorigen Paragraphen ganz von selbst.

Der Leser sieht aber an diesem Beispiel, daß es in praxi bequemer sein kann, Wege einzuschlagen, deren *direkte* theoretische Begründung schwieriger wäre, oder anders ausgedrückt, die zur Ableitung allgemeiner Sätze zu holprig sind.

§ 6. Differentialgleichungen der *Fuchs*schen Klasse.

Man sagt, eine Differentialgleichung $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ gehöre der *Fuchs*schen Klasse an, wenn sie *nur* außerwesentlich singuläre Stellen besitzt. Der erste Koeffizient besitzt dann im endlichen nur Pole höchstens erster Ordnung, der zweite nur Pole höchstens zweiter Ordnung. Über das Verhalten der Koeffizienten im Unendlichen müssen wir jetzt noch Aufschluß gewinnen. Schon S. 173 haben wir durch die Substitution

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

das Unendliche nach 0 gebracht. Wir werden sagen bei $z = \infty$ liege eine außerwesentliche Singularität, wenn die S. 173 angegebene transformierte Differentialgleichung bei $\zeta = 0$ eine außerwesentliche Singularität besitzt. Damit nun aber der erste Koeffizient

$$\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

der transformierten Gleichung bei $\zeta = 0$ einen Pol höchstens erster Ordnung habe, muß die Entwicklung von $p\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ so aussehen:

$$p\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots .$$

D. h. in der Umgebung von $z = \infty$ muß die Entwicklung von $p(z)$ so aussehen

$$p(z) = a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots ,$$

$p(z)$ hat also dort eine Nullstelle erster Ordnung. Somit muß $p(z)$ eine rationale Funktion mit nur Polen erster Ordnung sein. Versteht man unter $\alpha_1 \dots \alpha_n$ die Gesamtheit der Stellen, an welchen $p(z)$ oder $q(z)$ Pole haben, so besitzt $p(z)$ folgende Gestalt:

$$(1) \qquad p(z) = \frac{g(z)}{\varphi(z)} \qquad (\varphi(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)),$$

wo der Zählergrad um mindestens eins kleiner ist als der Nennergrad. Man braucht natürlich an sich in den Nenner nur die α_i zu schreiben, die wirklich Pole von $p(z)$ sind. Für die weitere Betrachtung ist es zweckmäßiger Zähler und Nenner noch mit den Faktoren $z - \alpha_i$ zu erweitern, die von Polen des $q(z)$ herrühren. Untersuchen wir nun den zweiten Koeffizienten

$$\frac{1}{\zeta^4} q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

der transformierten Gleichung. Soll er bei $\zeta = 0$ einen Pol von höchstens zweiter Ordnung haben, so muß die Entwicklung von $q\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ so aussehen

$$q\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \beta_2 \zeta^2 + \dots .$$

Also folgt

$$q(z) = \frac{\beta_2}{z^2} + \dots .$$

Daraus findet man, daß $q(z)$ eine rationale Funktion von folgender Gestalt sein muß

$$q(z) = \frac{h(z)}{(\varphi(z))^2} \qquad (\varphi(z) = (z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n)). \tag{2}$$

Der Zählergrad muß dabei um mindestens zwei Einheiten kleiner sein als der Nennergrad. Dabei ist wieder $\alpha_1 \dots \alpha_n$ die Gesamtheit der Stellen, an welchen $p(z)$ oder $q(z)$ Pole besitzen.

Umgekehrt gehört natürlich auch eine Differentialgleichung, deren Koeffizienten die eben angegebene Gestalt besitzen, der *Fuchs*schen Klasse an. Man kann die gefundenen Bedingungen auch mit Hilfe der Partialbruchzerlegung zum Ausdruck bringen.

Sind nämlich

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum \frac{A_k}{z-\alpha_k} \\ q(z) &= \sum \left\{ \frac{B_k}{(z-\alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z-\alpha_k} \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

die Partialbruchzerlegungen für die Koeffizienten einer Differentialgleichung

$$w'' + p(z)\,w' + q(z)\,w = 0$$

der *Fuchs*schen Klasse, so muß

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = 0 \qquad \lim_{z\to\infty} q(z) = 0 \qquad \lim_{z\to\infty} z \cdot q(z) = 0$$

sein[1]). So kann man nämlich die gefundenen Bedingungen ausdrücken. Den beiden ersten Bedingungen haben wir schon dadurch Rechnung getragen, daß wir in den obigen Partialbruchzerlegungen keine additiven ganzen Funktionen angebracht haben. Die letzte Bedingung aber führt zu der Gleichung

$$\sum C_k = 0.$$

---

[1]) Unsere Betrachtung läßt überdies erkennen, daß $z = \infty$ nur dann eine reguläre Stelle der Differentialgleichung ist, wenn überdies noch $\lim_{z\to\infty} z\,p(z) = 0$ und $\lim_{z\to\infty} z^2 q(z) = 0$ gilt.

Wir wollen noch die Fundamentalgleichung des unendlichfernen Punktes aufschreiben. Dazu müssen wir nur die Fundamentalgleichung der transformierten Gleichung bei $\zeta = 0$ aufschreiben. Setzen wir

$$\lim_{\zeta \to 0} \left\{ 2 - \frac{1}{\zeta} p\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right\} = \lim_{z \to \infty} \left\{ 2 - z\, p(z) \right\} = \alpha$$

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{1}{\zeta^2} q\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \lim_{z \to \infty} z^2 q(z) = \beta,$$

so wird die Fundamentalgleichung

$$\varrho(\varrho - 1) + \alpha\varrho + \beta = 0.$$

Das Fundamentalsystem des unendlich fernen Punktes sieht dann so aus

$$w_1 = \frac{1}{z^{\varrho_1}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$w_2 = \frac{1}{z^{\varrho_1}} A \log z \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^{\varrho_2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ist n die Anzahl der im endlichen gelegenen singulären Stellen, so hat man noch den Satz, *daß die Summe aller Wurzeln aller charakteristischen Gleichungen $n - 1$ beträgt.* Er beruht auf dem funktionentheoretischen Satz, daß die Summe der Residuen einer rationalen Funktion Null ist. Nun aber ist die Fundamentalgleichung der singulären Stelle α_k, wenn man die Darstellungen (1), (2) verwendet

$$\varrho(\varrho - 1) + \frac{g(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)} \varrho + \frac{h(\alpha_k)}{\{\varphi'(\alpha_k)\}^2} = 0.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{g(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)}$$

das Residuum von $p(z)$ bei α_k, während die Summe der beiden Wurzeln der Fundamentalgleichung

$$1 - \frac{g(\alpha_k)}{\varphi'(\alpha_k)}$$

wird. Im Unendlichen ist das Residuum $2 - \alpha$, die Summe der Wurzeln $1 - \alpha$. Daher wird die Summe aller Wurzeln um $n - 1$ größer als die Summe der Residuen, also gleich $n - 1$, da diese verschwindet.

Schreiben wir noch die Fundamentalgleichung unter Verwendung der Partialbruchzerlegungen (3) auf. Sie lauten:

$$\varrho(\varrho - 1) + A_k \varrho + B_k = 0$$
$$\varrho(\varrho - 1) + (2 - \Sigma A_k)\varrho + \Sigma(B_k + C_k \alpha_k) = 0.$$

§ 7. Die hypergeometrische Differentialgleichung.

Eine jede Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse muß im Endlichen mindestens eine singuläre Stelle haben. Denn sonst wären die Koeffizienten konstant. Aber die Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gehören nicht der *Fuchs*schen Klasse an, es sei denn, daß $w'' = 0$ vorgelegt ist. Denn die Koeffizienten anderer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten werden ja im Unendlichen nicht Null und ihre Integrale haben, wie wir von S. 120 wissen, im Unendlichen wesentlich singuläre Stellen.

Differentialgleichungen aber, welche im Endlichen gerade einen singulären Punkt haben, sind von der Form

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{B}{(z-a)^2} w = 0 .$$

Auch sie haben wir schon S. 123 zu integrieren gelernt. Diese Differentialgleichung hat überdies noch $z = \infty$ als singuläre Stelle, falls nicht $A = B = 0$ ist. Denn dies ist nach Fußnote[1]) von S. 185 die Bedingung dafür, daß $z = \infty$ eine reguläre Stelle ist.

Der nächst einfachste Fall ist also der, daß drei singuläre Punkte vorhanden sind. Sie mögen bei 0, 1, ∞ liegen[1]). Die Wurzeln ihrer Fundamentalgleichungen mögen

$$(\varrho_{0,1},\ \varrho_{0,2}),\quad (\varrho_{1,1},\ \varrho_{1,2}),\quad (\varrho_{\infty,1},\ \varrho_{\infty,2})$$

sein. Seit *Riemann* bezeichnet man eine jede Lösung einer solchen Differentialgleichung mit

$$P\begin{Bmatrix} 0, & 1, & \infty & \\ \varrho_{0,1} & \varrho_{1,1} & \varrho_{\infty,1} & z \\ \varrho_{0,2} & \varrho_{1,2} & \varrho_{\infty,2} & \end{Bmatrix}.$$

Man zählt nämlich leicht nach, daß die Anzahl der in die Koeffizienten der Differentialgleichung eingehenden Parameter 5 ist. Nämlich zwei Koeffizienten im Zähler von $p(z)$ und drei im Zähler von $q(z)$. Ebenso groß ist aber die Zahl der in den Ausdruck der P-Funktion eingehenden Parameter: 6 Fundamentalwurzeln, deren Summe 2 ist. Man wird somit erwarten, daß man die Koeffizienten der Differentialgleichung durch diese 5 neuen Parameter ausdrücken kann. Wir wollen das nachher auch tun, vorab aber bemerken, daß ein gleiches Resultat bei mehr als drei singulären Stellen nicht zu erwarten ist. Denn bei n endlichen Singularitäten hat man in den Differentialgleichungskoeffizienten

$$n + n + 2n - 1 = 4n - 1$$

[1]) Das läßt sich ja durch eine lineare Transformation stets erreichen.

Parameter. Ferner hat man n singuläre Stellen und $2n+2$ Fundamentalwurzeln. Da aber die Summe derselben wieder fest ist, so sind das noch $2n+1$ Parameter. Daher hat man bei dieser Zählung

$$3n+1$$

Parameter. Beide Zahlen stimmen nur für $n=2$ überein. Die überschüssigen in die Differentialgleichung eingehenden $n-2$ heißen die *akzessorischen Parameter*. Man kann — ähnlich wie bei Randwertaufgaben — versuchen, sie durch weitere den Lösungen auferlegte Bedingungen zu bestimmen. Man erhält so mannigfache Oszillationstheoreme, die später noch ein wenig näher berührt werden können.

Vorab wollen wir bei den Differentialgleichungen mit drei singulären Punkten stehen bleiben. Durch die Substitution

$$w = z^{\lambda}(1-z)^{\mu} \cdot W$$

kann man erreichen, daß bei 0 und 1 je eine der Fundamentalwurzeln verschwindet. Die beiden charakteristischen Wurzeln bei ∞ bezeichnet man dann mit α, β, die zweite Fundamentalwurzel von 0 hat man sich gewöhnt, mit $1-\gamma$ zu bezeichnen. Berücksichtigt man dann noch, daß die Summe aller 1 sein muß, so wird die zweite Wurzel des Punktes 1:

$$\gamma - \alpha - \beta.$$

Das Symbol der neuen P-Funktion wird also

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}.$$

Nun sollen die Koeffizienten der Differentialgleichung durch α, β, γ ausgedrückt werden. Das gelingt am besten durch Heranziehen der Partialbruchzerlegung der Koeffizienten und unter Verwendung der Schlußformeln der letzten Paragraphen. Denn dort kann man direkt die Ausdrücke der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch die Fundamentalwurzeln ablesen. Man findet so als Ausdruck der Differentialgleichung

$$w'' + \frac{-\gamma + (1+\alpha+\beta)z}{z(z-1)} w' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} w = 0.$$

Sie heißt *„hypergeometrische Differentialgleichung"* aus einem bald anzugebenden Grunde.

Unsere nächste Aufgabe ist es, die Fundamentalsysteme der drei singulären Punkte anzugeben. Ich beginne mit $z=0$, und will zunächst annehmen, daß γ keine negative ganze Zahl und nicht Null ist. Dann gehört zu der Fundamentalwurzel 0 ein bei $z=0$ reguläres, dort nicht verschwindendes Integral. Man kann es somit nach S. 177 mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten berechnen

und darf dabei etwa annehmen, daß es bei $z = 0$ den Wert Eins hat. Die so normierte Funktion bezeichnet man mit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten liefert nach leichter Rechnung, die der Leser selbst ausführen möge,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} z^2 + \ldots$$

Sie heißt die *hypergeometrische Reihe*, geht sie doch für $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$ in die geometrische Reihe über. Ihr Konvergenzkreis ist der Einheitskreis. Sie konvergiert außerdem für alle α, β, γ, wofern nur γ keine negative ganze Zahl ist, und konvergiert außerdem gleichmäßig in den α, β, γ. Denn das sind Parameter, die stetig in die Differentialgleichung eingehen.

Zur Berechnung der zweiten Funktion des Fundamentalsystems führt im Falle, wo γ keine ganze Zahl ist, die folgende Bemerkung. Wenn man in der hypergeometrischen Differentialgleichung die Substitution

$$W = z^{\gamma-1} \cdot w$$

macht, so erhält man eine neue hypergeometrische Differentialgleichung. Denn die Fundamentalwurzeln werden jetzt: Bei $z = 0$: $\gamma - 1$, 0, bei $z = 1$: 0, $\gamma - \alpha - \beta$, bei $z = \infty$: $\alpha - \gamma + 1$, $\beta - \gamma + 1$[1]): Setzt man daher

$$\alpha_1 = \alpha - \gamma + 1, \quad \beta_1 = \beta - \gamma + 1, \quad \gamma_1 = 2 - \gamma,$$

so erkennt man, daß der neuen Differentialgleichung die hypergeometrische Funktion $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$ genügt. Daher ist

$$w_2 = z^{1-\gamma} \cdot F(\alpha - \gamma + 1, \ \beta - \gamma + 1, \ 2 - \gamma, z)$$

das andere Integral des Fundamentalsystems der gegebenen Differentialgleichung. Natürlich kann man dies auch auf dem Wege der Rechnung bestätigen.

Nunmehr ist es auch leicht, für die Stellen Eins und Unendlich Fundamentalsysteme anzugeben. Macht man nämlich in der hypergeometrischen Differentialgleichung die Substitution

$$\zeta = 1 - z,$$

so wird dieselbe

$$w'' - \frac{-\gamma + \alpha + \beta + 1 + (1 + \alpha - \beta)\zeta}{\zeta(\zeta - 1)} w' + \frac{\alpha\beta}{\zeta(\zeta - 1)} w = 0.$$

Setzt man nun

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \gamma_1 = 1 + \alpha + \beta - \gamma,$$

---

[1]) Wenn z. B. $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ ist, so wird $W = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha-\gamma+1} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$.

so kann man sie auch so schreiben:

$$w'' + \frac{-\gamma_1 + (1 + \alpha_1 + \beta_1)\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}\,(\mathfrak{z} - 1)}\,w' + \frac{\alpha\beta}{\mathfrak{z}\,(\mathfrak{z} - 1)}\,w = 0\,.$$

Demnach ist

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \mathfrak{z}),\quad \mathfrak{z}^{1-\gamma_1} F(\alpha_1 - \gamma_1 + 1,\ \beta_1 - \gamma_1 + 1,\ 2 - \gamma_1, \mathfrak{z})$$

ein Fundamentalsystem derselben bei $\mathfrak{z} = 0$. Daher wird

$$F(\alpha, \beta,\quad 1 + \alpha + \beta - \gamma,\quad 1 - z)$$
$$(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ 1 - \alpha - \beta + \gamma,\ 1 - z)$$

ein Fundamentalsystem der ursprünglichen bei $z = 1$, falls nicht $\gamma - \alpha - \beta$ eine ganze Zahl ist.

Macht man andererseits die Substitution

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{z}\,,$$

so entsteht eine Differentialgleichung mit drei singulären Punkten $0, 1, \infty$, deren Fundamentalwurzeln

$$(\alpha, \beta),\quad (0, \gamma - \alpha - \beta),\quad (0, 1 - \gamma)$$

sind. Setzt man daher

$$W = \mathfrak{z}^{-\alpha} \cdot w\,,$$

so wird die Differentialgleichung hypergeometrisch mit den Fundamentalwurzeln: $(0, \beta - \alpha)$, $(0, \gamma - \alpha - \beta)$, $(\alpha, \alpha - \gamma + 1)$. Daher ist

$$F(\alpha, \alpha - \gamma + 1,\quad 1 + \alpha - \beta,\ \mathfrak{z})$$
$$\mathfrak{z}^{\beta - \alpha} \cdot F(\beta, \beta - \gamma + 1,\ 1 - \alpha + \beta,\ \mathfrak{z})$$

ein Fundamentalsystem derselben bei $\mathfrak{z} = 0$. Daher ist

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ 1 + \alpha - \beta,\ \frac{1}{z}\right)$$
$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta} F\left(\beta,\ 1 + \beta - \gamma,\ 1 + \beta - \alpha,\ \frac{1}{z}\right)$$

ein Fundamentalsystem der ursprünglichen bei $z = \infty$, falls $\alpha - \beta$ nicht ganzzahlig ist.

§ 8. Analytische Fortsetzung einer einzelnen Lösung.

Es ist in diesem einführenden Buche nicht meine Aufgabe, eine erschöpfende Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung zu geben. Vielmehr sehe ich meine Aufgabe darin, einen Überblick über die wesentlichsten bisher behandelten Probleme und einen Einblick in die zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden zu geben. Daher will ich auch nicht näher auf die Bestimmung der Fundamentalsysteme eingehen in den Fällen, wo die bisher bestimmten Fundamentalsysteme versagen, wenn also z. B. γ eine ganze Zahl ist. Methodisch würden ja diese Fälle nichts Neues mehr bieten.

Lieber will ich mich jetzt der Frage zuwenden, wie man die analytische Fortsetzung einer einzelnen Lösung bestimmen kann. Wenn z. B. $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ vorgelegt ist, so erhebt sich beispielsweise die Frage, wie sich dieselbe in der Nähe von $z = 1$ oder von $z = \infty$ verhält, überhaupt allgemein die Frage nach ihrer Änderung, wenn z einen geschlossenen Weg in seiner Ebene beschreibt.

Nun ist es nach den früheren Darlegungen auf Grund der Methode der sukzessiven Approximationen sofort möglich, jede Lösung in einem Stern der Differentialgleichung darzustellen. Ein solcher zum Mittelpunkt z_0 gehörender Stern hat zur Grenze die jenseits 0 oder 1 gelegenen Stücke der von z_0 nach 0 und 1 gezogenen Strahlen. Es fragt sich somit nur, wie sich die Lösung bei Überschreitung der den Stern begrenzenden Linien ändert. Weiß man das erst für jede Stelle, wo der zu untersuchende geschlossene Weg eine solche Linie überschreitet, so ist die gestellte Aufgabe gelöst. Es wird also nur darauf ankommen, Umläufe um einzelne singuläre Punkte zu untersuchen. Es ist dazu zweckmäßig, nicht $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ für sich zu betrachten, sondern die beiden Funktionen

$$w_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$
$$w_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \quad \beta - \gamma + 1, \quad 2 - \gamma, \; z),$$

welche das Fundamentalsystem bei $z = 0$ bilden, gleichzeitig nebeneinander zu betrachten. Am bequemsten gelangt man zum Ziele, wenn man den Quotienten

$$w = \frac{w_2}{w_1}$$

betrachtet. Wir wollen untersuchen, welche Abbildung diese Funktion von der oberen Halbebene $\Im(z) > 0$ vermittelt. Wir werden erkennen, daß die Halbebene in ein schlichtes Kreisbogendreieck übergeführt wird.

Ich setze die α, β, γ als reell voraus. Dann leuchtet ein, daß Zähler und Nenner von w auf der Strecke $0 < z < 1$ reell sind. Ferner ist die Ableitung von w niemals Null, besitzt also stets einerlei Vorzeichen. Denn es ist ja

$$w' = \frac{w_1 w_2' - w_2 w_1'}{w_1^2}.$$

Nach S. 120 hat man aber

$$w_1 w_2' - w_2 w_1' = c\, e^{-\int p(z)\, dz}.$$

Dieser Ausdruck kann nur an einer singulären Stelle der Differentialgleichung verschwinden. Daraus folgt, daß durch w das Stück $0 < z < 1$ der reellen Achse in ein monoton durchlaufenes Stück der reellen w-Achse übergeführt wird, wofern man sich für denjenigen Zweig von $z^{1-\gamma}$ entscheidet, der für $0 < z < 1$ positiv reell ist.

Was wird nun aus der negativen reellen Achse? Setzt man $z = r e^{i\varphi}$ in der oberen Halbebene, so wird für negative z

$$z = r e^{i\pi}.$$

Daher hat man

$$z^{1-\gamma} = r^{1-\gamma}\, e^{i\pi(1-\gamma)}$$

zu nehmen. Da wieder $w' \neq 0$ ist, so geht die negative reelle Achse in ein monoton durchlaufenes Stück der Geraden

$$\arg w = \pi(1-\gamma)$$

der w-Ebene über. Beide bisher genannten Geradenstücke bilden also einen Winkel von $\pi(1-\gamma)$ miteinander. Nun bleibt noch die reelle Achse

$$z > 1$$

übrig. Betrachten wir zunächst einmal in der Umgebung von $z = 1$ den Quotienten der beiden Funktionen, durch die wir vorhin S. 189 in der Umgebung dieses Punktes ein Fundamentalsystem darstellten. Dann erkennt man genau wie eben, daß durch diesen Quotienten $z > 1$ in eine gerade Strecke übergeführt wird. Da nun aber w_1 und w_2 bei der Fortsetzung in der Umgebung von $z = 1$ in lineare Funktionen der eben benutzten beiden Lösungen übergehen, so wird w eine gebrochene lineare Funktion des eben benutzten Quotienten. Und daher wird durch w die Strecke $z > 1$ auf einen Kreisbogen abgebildet. Derselbe muß mit den beiden schon eingeführten Strecken zusammen ein Dreieck bilden. Denn wenn z die reelle Achse durchläuft, so muß sich w aus funktionentheoretischen Gründen reproduzieren. Denn sonst enthielte die obere Halbebene weitere Singularitäten, Daher wird die reelle Achse auf eine geschlossene Kurve abgebildet, und zwar wie wir sahen, auf den Rand eines Kreisbogendreiecks. Somit wird wieder aus funktionentheoretischen Gründen die obere Halbebene auf dies Kreisbogendreieck selbst abgebildet. Welche Winkel besitzt dasselbe nun in den zwei noch übrigen Ecken? Zu dem Zwecke hat man nur den Charakter der Abbildung zu untersuchen, die der Quotient der beiden in der Umgebung von $z = 1$ und $z = \infty$ betrachteten ausgezeichneten Lösungen vermittelt. Denn unser Quotient $\frac{w_2}{w_1}$ ist ja bei $z = 1$ und $z = \infty$ als lineare Funktion dieser Quotienten darstellbar und lineare Abbildungen sind ja winkeltreu. Nun aber wird jener Quotient bei $z = 1$

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\frac{F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ 1-\alpha-\beta+\gamma,\ 1-z)}{F(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma,\ 1-z)}.$$

Bei $z = \infty$ aber wird er

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta-\alpha}\frac{F\left(\beta,\ 1+\beta-\gamma,\ 1+\beta-\alpha,\ \frac{1}{z}\right)}{F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ 1+\alpha-\beta,\ \frac{1}{z}\right)}.$$

Man erkennt sofort, daß dadurch die reelle Achse bei $z = 1$ in zwei unter dem Winkel $\pi(\gamma-\alpha-\beta)$ aneinanderstoßende Geraden über-

geführt wird, während bei $z = \infty$ der Winkel $\pi(\beta - \alpha)$ herauskommt. So haben wir das Resultat:

Durch die Abbildung

$$w = \frac{w_2}{w_1} = z^{1-\gamma} \frac{F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z)}{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}$$

wird die Halbebene auf ein Kreisbogendreieck abgebildet, das die drei Winkel $\pi(1 - \gamma)$, $\pi(\gamma - \alpha - \beta)$, $\pi(\beta - \alpha)$ besitzt. Ich kürze ab $\lambda = 1 - \gamma$, $\mu = \gamma - \alpha - \beta$, $\nu = \beta - \alpha$.

Die mehr funktionentheoretische Frage nach der Berechnung der Eckenkoordinaten dieses Dreiecks will ich nicht anschneiden, auch die damit zusammenhängende Frage nach den Änderungen, die unser Quotient und damit auch der Zähler w_2 und der Nenner w_1 bei Umlaufung der singulären Stellen erfahren, will ich nicht behandeln. Es mag genügen, die allgemeine Natur des Ergebnisses festgestellt zu haben. Jedenfalls wird einem Umlauf von z um einen singulären Punkt eine lineare Substitution des Quotienten entsprechen.

Ich will nur in gewissen Spezialfällen die qualitative Natur des Ergebnisses noch etwas weiter verfolgen. Nach dem Spiegelungsprinzip geht nämlich die untere Halbebene dann gleichfalls in ein Kreisbogendreieck über. Denke ich mir weiter die *Riemann*sche Fläche von $w(z)$ in ihre Halbebenen zerlegt und diese längs der drei Strecken $0 < z < 1$, $z > 1$, $z < 0$ jeweils aneinandergeheftet, so erhalte ich als Bild der *Riemann*schen Fläche einen aus lauter Kreisbogendreiecken aufgebauten Bereich.

Besonderes Interesse bietet nun der Fall, wo dieser Bereich schlicht ist, wo also kein Stück der Ebene mehrfach von den Kreisbogendreiecken bedeckt wird. Dazu ist lediglich erforderlich, daß die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ von der Form

$$\frac{\pi}{l},\quad \frac{\pi}{m},\quad \frac{\pi}{n}$$

sind, wo l, m, n ganze Zahlen bedeuten. Durch sukzessive Spiegelung der Dreiecke an den freien Rändern erhält man nämlich ein Dreiecksnetz. Man wird vor allen Dingen verlangen müssen, daß dieses Netz in der Umgebung eines jeden Eckpunktes eines Dreiecks die Ebene einfach und lückenlos bedeckt. Dies wird aber gerade durch die eingeführte Winkelbedingung gewährleistet. Betrachten wir z. B. die Ecke, an der der Winkel $\frac{\pi}{n}$ liegt, und spiegeln das Dreieck an einer von dieser Ecke ausgehenden Seite, so erhalten wir ein weiteres Dreieck, das an das erste anstößt. Der von beiden gebildete Bereich ist unter anderem von zwei von der Ecke ausgehenden Kreisbogen begrenzt, welche einen Winkel von $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander bilden. Beiläufig bemerkt, ist dieser Bereich nun das Bild einer vollen von 1 bis ∞ längs der

reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene. Spiegele ich den Bereich erneut an einem seiner von der gleichen Ecke ausgehenden Kreisbogen, so erhalte ich einen neuen an diese Ecke wieder mit dem Winkel $2\frac{\pi}{n}$ anstoßenden Bereich. Wenn ich so an den freien Rändern im ganzen n-mal spiegele, so erhalte ich n jeweils mit dem Winkel $2\frac{\pi}{n}$ an die Ecke anstoßende Bereiche, deren jeder aus zwei zueinander spiegelbildlichen Kreisbogendreiecken besteht. Diese n-Bereiche bedecken die ganze Umgebung der Ecke gerade einmal lückenlos.

Schraffiert man diejenigen Hälften der Bereiche, welche Bilder der oberen Halbebene sind, so besteht jeder Bereich aus einer schraffierten und einer nicht schraffierten Hälfte. (Vgl. Fig. 11, die für $n = 4$ gezeichnet ist.) Je zwei schraffierte Hälften gehen durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen auseinander hervor. Eine solche gerade Anzahl von Spiegelungen ist aber gleichbedeutend mit einer linearen Abbildung, welche die gemeinsame Ecke festläßt. Die so erhaltenen linearen Abbildungen lassen sich alle als Wiederholungen (Potenzen) einer derselben darstellen. Wenn man nämlich zwei benachbarte schraffierte Bereiche ins Auge faßt, so hängen sie durch eine lineare Abbildung zusammen, deren Wiederholungen die übrigen linearen Abbildungen ergeben. Natürlich handelt es sich um elliptische lineare Abbildungen, deren n-te Potenz die identische Abbildung ist, also um Substitutionen der Periode n.

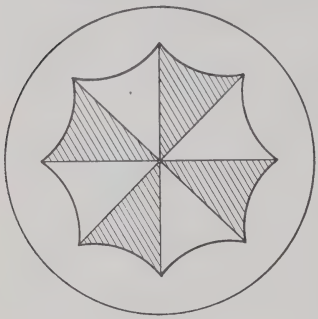

Fig. 11.

In diesen Betrachtungen liegt begründet, daß die Abbildung in der Umgebung einer jeden Ecke einen schlichten Bildbereich liefert. Man kann weiter schließen, daß der ganze Bildbereich schlicht ist. Ich will diesen Beweis nicht völlig durchführen, sondern nur einige Gesichtspunkte hervorheben, die bei der Anlage des Beweises zur Geltung kommen. Insbesondere hat man die nachstehend unterschiedenen drei Fälle auch beim Beweis gesondert zu behandeln. Als Muster dient dabei immer die Beweisführung, die man in meinem Lehrbuch der Funktionentheorie S. 239/240 für die Schlichtheit der durch das elliptische Integral erster Gattung vermittelten Abbildung findet. In dem Falle, wo die Dreiecke nur eine endliche Kreisscheibe erfüllen, hat man den dort benutzten Rationalitätsradius im kreisgeometrischen Sinne zu nehmen. Im Falle der Vollebene hat man sich der auf einer Kugeloberfläche üblichen (elliptischen) Maßbestimmung zu bedienen.

Die erwähnte Tatsache der Schlichtheit hat zunächst zur Folge, *daß die Umkehrungsfunktion unserer Abbildungsfunktion eindeutig ist.*

Sie ist weiter eine *automorphe Funktion*. Die linearen Abbildungen nämlich, welche die verschiedenen Bilddreiecke der z-Ebene ineinander überführen, bilden eine Gruppe. Da in jedem der Bildbereiche die Umkehrungsfunktion dieselben Werte annimmt, so bleibt sie ungeändert, wenn man auf ihr Argument irgendeine Transformation dieser Gruppe ausübt. Solche Funktionen nennt man aber *automorphe*. Somit führen unsere an die Differentialgleichung anschließenden Überlegungen hinüber zur Theorie der automorphen Dreiecksfunktionen.

Ich will noch ein Wort über ihre Klassifikation anschließen. Diese hängt von dem Wert der Summe

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

ab. Ist diese gleich Eins, so ist die Winkelsumme unseres Dreiecks π. Daraus erschließt man, daß dasselbe geradlinig angenommen werden kann. Man kann nämlich durch eine lineare Substitution stets erreichen, daß zwei seiner Seiten geradlinig sind. Nimmt man nun eine weitere Ecke beliebig an, so muß durch dieselbe unter vorgeschriebenem Winkel gegen die schon vorhandene gerade Seite desselben ein Kreisbogen gelegt werden, der die dritte Seite wieder unter vorgeschriebenem Winkel trifft. Dadurch ist aber, wie man leicht einsieht, der Kreisbogen bestimmt. Daß aber in unserem Falle eine dritte gerade Dreiecksseite die Winkelsumme zu π, d. h. $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ zu 1 macht, ist selbstverständlich. Durch Ausübung der zugehörigen Gruppe erhält man eine lückenlose Bedeckung der vollen Ebene mit unendlich vielen kongruenten Dreiecken.

Ein weiterer Fall ist der, daß

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1$$

ist. Dann ergibt sich, daß die ganze Ebene mit endlich vielen entsprechenden Dreiecken bedeckt wird. Nun bleibt noch der Fall

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1\,.$$

Alsdann gibt es einen Kreis, der auf den drei Dreiecksseiten senkrecht steht. Zwei der Dreiecksseiten darf man nämlich wieder geradlinig annehmen. Ihr Schnittpunkt werde als Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises gewählt. Zieht man nun von ihm aus die beiden Tangenten nach dem Kreise, welchem die dritte Dreiecksseite angehört, so steht der mit der Tangentenlänge als Radius beschriebene Kreis auf dem Seitenkreis senkrecht. So kann man bei jedem nicht geradlinigen Dreiecke schließen, also auch dann, wenn die Winkelsumme π übertrifft. Hier aber, wo sie kleiner als π ist, kann man weiter schließen, *daß unser Kreisbogendreieck völlig dem Innern des*

Orthogonalkreises angehört. Denn wegen der Winkelsumme liegt das Dreieck ganz im Inneren des geradlinigen Dreiecks mit den gleichen Ecken. Die Tangenten berühren somit jedenfalls *außerhalb* dieses Dreiecks den Kreis. Daher liegt der die Seite enthaltende Kreisbogen und damit das ganze Dreieck im Inneren des Orthogonalkreises. Durch eine Spiegelung an einer Dreiecksseite geht aber nun der Orthogonalkreis in sich über. Daher liegen alle Dreiecke des Netzes ganz im Inneren des Orthogonalkreises, und man kann, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, zeigen, daß sie dies Innere einfach und lückenlos bedecken. Die Peripherie des Orthogonalkreises ist natürliche Grenze für die automorphe Funktion, weil sich gegen jeden Punkt der Peripherie die Dreiecke häufen und die Funktion in einem jeden Dreieck jeden Wert annimmt.

Ich schließe diese Darlegungen mit einem knappen Hinweis auf die allgemeinen Probleme, die sich ergeben, wenn die Differentialgleichung mehr als drei singuläre Punkte besitzt. Wir haben schon oben (S. 187) festgestellt, daß dann die Koeffizienten nicht eindeutig durch die singulären Stellen und die Wurzeln ihrer Fundamentalgleichungen festgelegt sind, sondern daß dann noch akzessorische Parameter bleiben. Beispielsweise hat eine Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse mit vier singulären Stellen a, b, c, ∞ die Gestalt

$$w'' + w'\left(\frac{1-\alpha}{z-a} + \frac{1-\beta}{z-b} + \frac{1-\gamma}{z-c}\right) + \frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)}(Az+B) = 0.$$

a, b, c besitzen die fundamentalen Wurzelpaare

$$(0, \alpha), \quad (0, \beta), \quad (0, \gamma),$$

während die fundamentalen Wurzeln δ_1, δ_2 des unendlich fernen Punktes sich aus den Gleichungen $\alpha + \beta + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 2$, $\delta_1 \delta_2 = A$ ergeben. B fungiert also als *akzessorischer Parameter*. Wenn alles reell ist, kann man ihn z. B. durch die Zahl der Nullstellen festlegen, die eine Lösung der Gleichung in einem gegebenen Intervall haben soll. Das wäre also eine Festlegung im Rahmen eines Oszillationstheorems. Man kann aber auch nach funktionentheoretischen Gesichtspunkten vorgehen. Wenn wieder die Gleichung z. B. reell ist, so wird wieder die obere Halbebene auf ein Kreisbogenviereck abgebildet. Zu diesem gehört aber im allgemeinen kein Kreis, der auf seinen sämtlichen Seiten senkrecht steht. Man kann aber verlangen, den akzessorischen Parameter so zu bestimmen, daß ein Orthogonalkreis auftritt. Fordert man außerdem noch, daß die Umkehrung des Quotienten zweier Lösungen eine eindeutige automorphe Funktion wird, so ist dadurch der akzessorische Parameter sogar eindeutig festgelegt. Ich begnüge mich damit, den Charakter der Probleme anzudeuten. Ein weiteres Eindringen in dieselben muß dem Spezialstudium des Lesers vorbehalten

bleiben. Man vergleiche dazu insbesondere *Klein:* Math. Ann. **64** und *Hilb:* Math. Ann. **66**, **68**.

In einer letzten Bemerkung dieses Paragraphen werde noch auf ein berühmtes Problem hingewiesen. Unsere Darlegungen haben klar gezeigt, daß jeder Differentialgleichung eine bestimmte Gruppe von linearen Substitutionen zugehört. Das ist die Gruppe derjenigen linearen Substitutionen, welche ein Fundamentalsystem erfährt, wenn man z irgendwelche Wege in seiner Ebene durchlaufen läßt. Diese Gruppe heißt *Monodromiegruppe* der Differentialgleichung.

Unter dem Namen *Riemannsches Problem* ist nun die folgende umgekehrte Frage geläufig: Wenn man Monodromiegruppe und singuläre Stellen $a \ldots a_n$ einer Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse vorgibt, gehört dann dazu auch immer eine Differentialgleichung, die diese singulären Punkte und diese Monodromiegruppe besitzt? *Hilbert* und *Plemelj* haben mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen dies Problem gelöst, und der letztere hat sogar einen Überblick über die Mannigfaltigkeit der Lösungen geben können. *Birkhoff* hat ein analoges Problem für Differentialgleichungen mit wesentlich singulären Stellen gegebener Natur formuliert und gelöst. Wegen der Literaturangaben werde wieder auf die Enzyklopädie verwiesen.

§ 9. *Legendre*sche Polynome.

Besonderes Interesse verdienen die Polynome, welche der hypergeometrischen Differentialgleichung genügen. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten, welche immer auf die hypergeometrische Reihe führt, lehrt dann, daß diese Reihe abbrechen muß. Dies ist aber nur dann möglich, wenn α oder β eine negative ganze Zahl ist. Die so entstehenden Polynome nennt man nach *Jacobi*, der sie zuerst allgemein betrachtet hat, *Jacobi*sche *Polynome*. *Jacobi* hat auch eine zu (1) von S. 199 analoge interessante Darstellung derselben als mehrfache Ableitung angegeben. Wir wollen dieselbe für den wichtigsten Spezialfall der älteren *Legendre*schen Polynome hernach herleiten. Diese *Legendreschen Polynome* erhält man, wenn man in der hyper geometrischen Reihe

$$\alpha = k + 1, \qquad \beta = -k, \qquad \gamma = 1$$

($k > 0$ ganze Zahl) setzt. Genau genommen sind dies allerdings noch nicht die *Legendre*schen Polynome, sondern der den *Legendre*schen entsprechende Spezialfall der *Jacobi*schen. Die *Legendre*schen selbst erhält man, wenn man die singulären Punkte der Differentialgleichung nach -1, $+1$, ∞ legt, statt nach 0, 1, ∞. Macht man somit in der hypergeometrischen Differentialgleichung die Substitution

$$z = \frac{1-\tau}{2},$$

so geht sie in die Differentialgleichung

$$(1-\tau^2)\frac{d^2w}{d\tau^2} - 2\tau\frac{dw}{d\tau} + k(k+1)w = 0$$

der *Legendre*schen Polynome über. Das k-te derselben ist also durch

$$P_k(\tau) = F\left(k+1, -k, 1, \frac{1-\tau}{2}\right)$$

gegeben. Die *Jacobi*sche Darstellung derselben erhält man wie folgt:

Wenn man die hypergeometrische Reihe nach z differenziert, so erkennt man sofort, daß die Ableitung als hypergeometrische Funktion

$$\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z)$$

geschrieben werden kann. Durch Wiederholung dieses Differenzierens erkennt man allgemein die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{d^n F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz^n}$$
$$= \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, z).$$

Die Ableitungen der hypergeometrischen Reihe sind also selbst hypergeometrische Funktionen, und zwar genügt die n-te $w^{(n)}$ derselben der Differentialgleichung

$$z(z-1)\frac{d^2w^{(n)}}{dz^2} + [(\alpha+\beta+2n+1)z - \gamma - n]\frac{dw^{(n)}}{dz} + (\alpha+n)(\beta+n)w^{(n)} = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$z^{\gamma+n-1}\cdot(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n},$$

so erkennt man leicht, daß man sie in der Form

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{\gamma+n}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n+1}\frac{dw^{(n)}}{dz}\right\}$$
$$= -(\alpha+n)(\beta+n)z^{\gamma+n-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}w^{(n)}$$

schreiben kann. Differenziert man dies n-mal, so erhält man

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left\{z^{\gamma+n}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n+1}\frac{dw^{(n)}}{dz}\right\}$$
$$= -(\alpha+n)(\beta+n)\frac{d^n}{dz^n}\left\{z^{\gamma+n-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+n}w^{(n)}\right\}.$$

Bildet man diese Gleichung der Reihe nach für die Werte $n = 0, 1, \ldots, k-1$ und multipliziert sie miteinander, so erhält man

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{z^{\gamma+k-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma+k}w^{(k)}\right\}$$
$$= (-1)^k\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)z^{\gamma-1}\cdot(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma}w.$$

Wenn nun insbesondere die hypergeometrische Reihe mit dem Glied k-ten Grades abbricht, so wird die k-te Ableitung eine Konstante und man kann der letzten Gleichung eine Darstellung von w als k-te Ableitung entnehmen. Für den Fall der *Legendre*schen Polynome werde dies noch fertig ausgerechnet. Die k-te Ableitung von

$$F(k+1,\ -k,\ 1,\ z)$$

wird aber ersichtlich

$$\frac{(k+1)(k+2)\dots(2k)(-1)^k \cdot k!}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{k!}.$$

Somit erhält man die Darstellung

$$\frac{(-1)^k (2k)!}{k!} \frac{d^k}{dz^k}(z^k (z-1)^k) = (k+1)(k+2)\dots(2k)\, k!\, w.$$

Also wird

$$w = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k}(z^k (z-1)^k).$$

Geht man von hier durch die Substitution $z = \frac{1-\tau}{2}$ zu den echten *Legendre*schen Polynomen über, so findet man

$$(1) \qquad P_k(\tau) = \frac{1}{k!} \frac{1}{2^k} \frac{d^k}{d\tau^k}(\tau^2 - 1)^k.$$

Man kann die Differentialgleichung derselben auch in der Form

$$\frac{d}{d\tau}\left[(1-\tau^2)\frac{dw}{d\tau}\right] + k(k+1)\, w = 0$$

schreiben. Mit ihrer Hilfe leitet man leicht nach den Regeln der partiellen Integration die Orthogonalitätseigenschaften derselben her. Man findet

$$\int_{-1}^{+1} P_k^2(\tau)\, d\tau = \frac{2}{2k+1}, \qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\tau) P_m(\tau)\, d\tau = 0. \qquad (n \neq m)$$

Man kann jede in dem Intervall $-1 \leqq \tau \leqq +1$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(\tau)$ in eine nach *Legendre*schen Polynomen fortschreitende Reihe entwickeln:

$$f(\tau) = \sum a_n P_n(\tau), \text{ wo } a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\tau) P_n(\tau)\, d\tau.$$

Vorab bemerke ich noch, daß die *Legendre*schen Polynome die Lösungen der folgenden Randwertaufgabe sind:

Wie muß man den Parameter λ wählen, damit die Differentialgleichung

$$(D) \qquad \frac{d}{d\tau}\left[(1-\tau^2)\frac{dw}{d\tau}\right] + \lambda w = 0$$

Lösungen besitzt, welche in dem abgeschlossenen Intervall

$$-1 \leqq \tau \leqq +1$$

endlich sind?

Die seitherigen Darlegungen zeigen, daß jedenfalls für $\lambda = k(k+1)$ mit ganzem positiven k solche Lösungen in den *Legendre*schen Polynomen vorliegen. Sie sind aber zugleich, wie man beweisen kann, die einzigen Lösungen der Randwertaufgabe.

Ich will indessen diese Betrachtungen nicht weiter ausführen. Ich will auch darauf verzichten, hier den Entwicklungssatz zu beweisen. Er würde entweder etwas tiefer, als bisher geschehen, in die Theorie der Integralgleichungen hineinführen oder aber noch weitere Entwicklungen über die *Legendre*schen Polynome erfordern. Zunächst nämlich würde es sich darum handeln, die $P_n(\tau)$ abzuschätzen, um die Konvergenz der Reihe

$$\sum \frac{P_n(x)\,P_n(\xi)}{n(n+1)}$$

und der Reihe $\sum a_n P_n(x)$ zu gewinnen, welche $f(x)$ darstellen soll. Von hier an kann man dann den Darstellungssatz entweder ganz ähnlich beweisen, wie das z. B. für *Fourier*sche Reihen in meinem Leitfaden der Integralrechnung dargelegt ist, oder man kann den Darstellungsbeweis der Theorie der Integralgleichungen entnehmen. Als Bindeglied ist dann der Nachweis nötig, daß die Reihe

$$\sum \frac{P_n(x)\,P_n(\xi)}{n(n+1)}$$

mit der *Green*schen Funktion des Randwertproblemes identisch ist. Dabei aber ergeben sich einige Schwierigkeiten, weil nämlich die Gleichung

$$\frac{d}{d\tau}\left((1-\tau^2)\frac{dw}{d\tau}\right) = 0$$

selbst die Lösung $w = \text{konst.}$ besitzt, welche der Randbedingung genügt. Es liegt also gerade der Ausnahmefall vor, den wir oben beiseite ließen.

Hier hilft man sich nun so: Man wähle einen Wert von λ aus, der *nicht* Eigenwert der Differentialgleichung (D) ist. Er sei $\lambda = \alpha$. Alsdann schreibe man die Differentialgleichung so

$$\frac{d}{d\tau}\left((1-\tau^2)\frac{dw}{d\tau}\right) + (\alpha+\mu)w = 0. \qquad (\mu = \lambda - \alpha)$$

Sie ist alsdann vom *Sturm-Liouville*schen Typus, den wir S. 156 besprachen. Die Eigenfunktionen sind nach wie vor $P_n(\tau)$ und diese gehören zu den Eigenwerten $n(n+1) - \alpha$. Die Betrachtungen von S. 153 ff. lehren dann ohne weiteres die Gültigkeit des Entwicklungssatzes, denn ebenso wie die Konvergenz von $\sum \frac{P_n(x)\,P_n(\xi)}{n(n+1)}$ beweist man die von $\sum \frac{P_n(x)\,P_n(\xi)}{n(n+1)-\alpha}$.

Dritter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 1. Einige allgemeine Betrachtungen.

Unter einer partiellen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen den unabhängigen Variablen, einer unbekannten Funktion und den partiellen Ableitungen derselben nach diesen unabhängigen Variablen. Dabei wird angenommen, daß mehr als eine unabhängige Variable vorkommt. Anderenfalls läge nämlich eine gewöhnliche Differentialgleichung vor. Eine partielle Differentialgleichung wird durch Nullsetzen einer Funktion der genannten Größen zum Ausdruck gebracht. Insbesondere heißt die Gleichung von der ersten Ordnung, wenn sie nur Ableitungen erster Ordnung enthält. Eine Gleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und einer abhängigen Veränderlichen z sieht also aus:

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Dabei sind in üblicher Abkürzung mit p und q die Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ der gesuchten Funktion $z(x, y)$ bezeichnet worden. Die Funktion $f(x, y, z, p, q)$ soll in einem gewissen Bereich B der x, y, z, p, q eindeutig und stetig sein und daselbst stetige erste Ableitungen besitzen. Es soll außerdem vorausgesetzt werden, daß für ein der Gleichung (1) genügendes Wertesystem dieses Bereiches niemals $\frac{\partial f}{\partial p}$ und $\frac{\partial f}{\partial q}$ beide zugleich verschwinden. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir in der Umgebung der zu betrachtenden Stelle $\frac{\partial f}{\partial p}$ als von Null verschieden voraussetzen. Dann kann man nach dem Satz über implizite Funktionen in der Umgebung eines jeden der Gleichung (1) genügenden Wertsystemes aus B die Gleichung (1) nach p auflösen und so q als eindeutige, stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion $p = \varphi(x, y, z, q)$ darstellen.

Was ist die geometrische Bedeutung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung? Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ordnet jedem Punkte ein oder mehrere Linienelemente zu. Die Differentialgleichung integrieren heißt da, Kurven zu finden, die aus lauter Linienelementen der Differentialgleichung aufgebaut sind. Hier liegen die Dinge ähnlich. Den Inbegriff von fünf Zahlen x, y, z, p, q nennen wir ein Flächenelement. Der Punkt x, y, z ist sein Trägerpunkt. p und q geben die Stellung der hindurchgehenden Ebene $\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$ an. Rechtwinklige cartesische Koordinaten ξ, η, ζ mögen dabei der Betrachtung zugrunde liegen. Einem jeden Punkte des zugrunde gelegten Bereiches ordnet also die partielle Differentialgleichung Flächenelemente zu. Vorauszusetzen ist dabei, daß die Differentialgleichung einem gegebenen Punkte x_0, y_0, z_0 des zugrunde gelegten Bereiches überhaupt ein Flächenelement zuordne, daß es also zwei weitere Zahlen p_0 und q_0 gebe, so daß (1) erfüllt ist. Nach unseren Voraussetzungen lehrt dann der Satz über implizite Funktionen, daß allen hinreichend wenig von p_0 verschiedenen Werten von p genau ein der Differentialgleichung (1) genügender, wenig von q_0 verschiedener Wert q zugeordnet ist. Mit anderen Worten: die dem Punkte x_0, y_0, z_0 zugeordneten sich stetig an p_0, q_0 anschließenden Flächenelemente bilden eine einparametrige Schar. Sie umhüllen, geometrisch gesprochen, einen Kegel, dessen Spitze im Punkte x_0, y_0, z_0 liegt. Freilich kann dieser Kegel auch ausarten. Wenn z. B. die gegebene Differentialgleichung eine lineare Beziehung zwischen p und q ist, wenn sie also die Form $p + g(x, y)\, q = h(x, y)$ besitzt, dann gehen alle Flächenelemente durch eine Gerade. Solche Differentialgleichungen heißen daher *linear*. Der Kegel artet also hier in ein *Büschel* aus[1]).

Was bedeutet es nun, die Differentialgleichung zu integrieren? Man soll eindeutige Funktionen $z = z(x, y)$ finden, die der Differentialgleichung genügen. Geometrisch bedeutet das die Auffindung von Flächen, welche aus Flächenelementen der Differentialgleichung aufgebaut sind, oder anders ausgedrückt: welche in jedem ihrer Punkte den zugehörigen Kegel berühren.

Aus diesen Bemerkungen kann man schon einige Anhaltspunkte für die Integration gewinnen. Nehmen wir irgendeine Integralfläche als gegeben an. Ich betrachte einen ihrer Punkte. Dort besitzt sie ein bestimmtes Flächenelement, welches den Kegel dieses Punktes in einer Mantellinie berührt oder durch die Achse der Büschels geht. Jedem Punkt der Fläche ist so eine Fortschreitungsrichtung zugeordnet. Man kann auf der Fläche durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen diejenigen Kurven bestimmen, welche diese Richtungen

[1]) Näheres siehe S. 204.

stets einhalten. Bringt man dann noch in jedem ihrer Punkte das Flächenelement der Integralfläche an, so erhält man einen Integralstreifen. Unter Streifen also sollen die längs einer beliebigen Kurve aneinandergereihten Flächenelemente verstanden sein. Doch dürfen sie längs der Kurve nicht ganz beliebig gewählt werden, sondern so, daß man den Streifen auf eine Fläche legen kann. Ist also

$$(2) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad p = p(t), \quad q = q(t)$$

die Parameterdarstellung eines Streifens und $z = z(x, y)$ eine Fläche, der er angehört, so muß die Beziehung $z(t) = z\{x(t), y(t)\}$ gelten. Daraus folgt durch Differentiation, daß für einen Streifen die Relation $z' = p\,x' + q\,y'$ erfüllt sein muß. Das führt uns zu der

Definition: *Unter einem Streifen verstehen wir eine einparametrige Schar von Flächenelementen* (2). *Die Funktionen* (2) *sollen eindeutig und stetig sein und stetige Ableitungen besitzen für ein bestimmtes Intervall* $a \leqq t \leqq b$, *und es soll in diesem Intervall für sie die Beziehung* $z' = p\,x' + q\,y'$ *bestehen.*

Ein solcher Streifen soll insbesondere ein *Integralstreifen* heißen, wenn seine Flächenelemente der Differentialgleichung genügen, wenn also identisch in t die Beziehung $f\{x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\} = 0$ besteht. Wir werden erkennen, daß man gewisse Integralstreifen, die wir *charakteristische* nennen werden, durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen *ohne* vorherige Kenntnis einer Integralfläche gewinnen kann, und daß man jede Integralfläche dann aus solchen Streifen aufbauen kann. Damit wird es dann ein Hauptergebnis unserer Untersuchung sein, daß man die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen kann.

§ 2. Lineare Differentialgleichungen.

Am leichtesten ist es, diesen Gedanken für die linearen Differentialgleichungen durchzuführen. Hier bilden ja die einem einzelnen Punkt zugeordneten Flächenelemente ein Büschel. Wir betrachten nun insbesondere diejenigen Integralstreifen, deren Trägerkurven jeden Punkt in der Richtung der Trägergeraden seines Ebenenbüschels passieren. Daher müssen die Trägerkurven dieser Integralstreifen — wir nennen sie kurz *Charakteristiken* oder *charakteristische Kurven* — einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen genügen, das so aussehen muß:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z),$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z).$$

Denn diese Gleichungen bringen gerade zum Ausdruck, daß jedem

Raumpunkt ein Linienelement zugeordnet ist. Es ist auch sehr leicht, die Funktionen φ_1 und φ_2 aus den Koeffizienten der linearen partiellen Differentialgleichung

$$p + g \cdot q = h \tag{3}$$

zu berechnen. Sind nämlich $p_1 = h$, $q_1 = 0$ und p_2, $q_2 \neq 0$ die Stellungen zweier Ebenen des Büschels, so ergeben

$$\zeta - z = h(\xi - x)$$
$$\zeta - z = p_2(\xi - x) + q_2(\eta - y)$$

die beiden Gleichungen der Trägergeraden des Büschels im Punkte x, y, z. Da aber zwischen $p = p_2$ und $q = q_2 \neq 0$ die Gleichung (3) besteht, so werden diese beiden Gleichungen

$$\zeta - z = h(\xi - x)$$
$$\zeta - z = h(\xi - x) - g\, q_2(\xi - x) + q_2(\eta - y)$$

oder

$$\frac{\zeta - z}{\xi - x} = h, \qquad \frac{\eta - y}{\xi - x} = g. \tag{4'}$$

Daher ordnen die Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = h, \qquad \frac{dy}{dx} = g \tag{4}$$

jedem Punkt ein Linienelement zu, dessen Trägergerade die beiden angegebenen Gleichungen (4') besitzt. Die Gleichungen (4) geben also die Differentialgleichungen der charakteristischen Kurven an. Wir haben schon im vorigen Paragraphen gezeigt, wie man auf einer Integralfläche längs einer ihrer Kurven einen Integralstreifen konstruieren kann. In einem Gebiet der (x, y, z) nun, in welchem g und h eindeutig und stetig und mit stetigen ersten Ableitungen versehen sind, geht durch jeden Punkt eine Charakterstik hindurch. Wir suchen nun insbesondere auf einer Integralfläche eine charakteristische Kurve, um längs derselben dann in der Fläche einen charakteristischen Integralstreifen zu konstruieren. Gibt es aber auf jeder Integralfläche charakteristische Kurven, so ist nun die Richtigkeit der folgenden wichtigen Bemerkung einzusehen: *Eine Charakteristik, welche einen Punkt mit einer Integralfläche gemein hat, verläuft ganz in ihr, d. h. es gibt einen an den Punkt anschließenden Bogen derselben, der der Integralfläche angehört.* Die Wichtigkeit dieser Bemerkung liegt darin, daß man darnach mit jedem Punkt einer Integralfläche eine volle ihr angehörige Kurve (aus den Differentialgleichungen (4)) kennt.

Der Beweis ergibt sich aus folgender Überlegung: Wenn $z = F(x, y)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung ist, so hat $z - F(x, y)$ längs jeder Charakteristik einen konstanten Wert, wofern nur die y-Koordinaten derselben Werte besitzen, für welche $F(x, y)$ *mit stetigen ersten Ableitungen versehen* ist. Denn tragen wir eine Charak-

teristik $y = y(x)$, $z = z(x)$ in $z - F(x, y)$ ein und differenzieren nach x, so ergibt sich

$$\frac{dz}{dx} - p - q\frac{dy}{dx} = h - p - qg.$$

Wegen der partiellen Differentialgleichung (3), welcher $F(x, y)$ genügt, ist aber $h - p - qg = 0$. Also ist tatsächlich längs der Charakteristik $z - F(x, y) = \text{konst.}$ Wenn also für einen Punkt derselben $z - F(x, y) = 0$ ist, so gilt dies für einen ganzen Bogen derselben.

Hiernach ist sofort klar, daß eine jede mit stetigen ersten Ableitungen versehene Integralfläche aus Charakteristiken aufgebaut ist. Man ziehe nur auf der Fläche eine Kurve, die selbst keine Charakteristik ist und lege durch ihre Punkte die Charakteristiken. Dann liegen diese alle auf der Fläche und bedecken einen gewissen Teilbereich derselben lückenlos. Von hier ist nur ein Schritt zur Idee eines Existenzbeweises. Man geht von einer beliebigen Raumkurve aus und legt durch ihre Punkte die Charakteristiken. Dann kann man vermuten, daß die von ihnen gebildete Fläche eine Integralfläche ist.

Um aus dieser vagen Idee einen auf feste Voraussetzungen gegründeten Satz zu machen, stelle ich die ganzen Überlegungen auf eine neue Basis, auf Grund deren man weitergehende Ergebnisse erzielt, als es die wohl mögliche Weiterführung der seitherigen Gedankengänge gestatten würde.

Ich lege der Betrachtung einen Bereich B der x, y, z zugrunde, in welchem die Koeffizienten g und h der partiellen Differentialgleichung (3) eindeutig und stetig sind und stetige erste Ableitungen besitzen. Durch jeden Punkt x_0, y_0, z_0 von B geht dann genau eine Charakteristik

$$(5) \qquad y = \psi_1(x, x_0, y_0, z_0), \qquad z = \psi_2(x, x_0, y_0, z_0).$$

Hier ist nun nach S. 38 sowohl ψ_1 wie ψ_2 stetig in seinen Argumenten und besitzt nach jedem derselben eine stetige erste Ableitung. Dies gilt für alle x_0, y_0, z_0 aus B und ein gewisses, x_0 umgebendes Intervall der x. Nunmehr wähle ich auf der Ebene $x = x_0$ einen Bereich, dessen Punkte dem Bereiche B angehören. Durch jeden derselben lege ich die Charakteristik. Dann erfüllen die auf diesen Charakteristiken gelegenen Punkte einen gewissen drei-dimensionalen Teilbereich G völlig. Daß nämlich die von den Punkten der Charakteristiken gebildete Punktmenge ein Bereich ist, folgt so: Es sei P ein Punkt in B auf einer der Charakteristiken. Dann geht nach S. 38 durch jeden P hinreichend benachbarten Punkt von B eine Charakteristik, welche die Ebene $x = x_0$ gleichfalls in einem Punkt des auf $x = x_0$ gewählten Bereiches trifft. Es sei nun (x, y, z) ein solcher Punkt aus P, dann ist

$$(6) \qquad y_0 = \psi_1(x_0, x, y, z), \qquad z_0 = \psi_2(x_0, x, y, z)$$

der Punkt der Ebene $x = x_0$, in welchem die Charakteristik durch (x, y, z) diese Ebene trifft. Diese Gleichungen sind also die Auf-

lösung der Gleichungen (5). Dies wieder bedeutet, daß durch die Transformation (5) auf die Punkte des Bereiches G eine umkehrbar eindeutige Transformation ausgeübt wird.

Nunmehr will ich durch die Substitution (5), (6) in G statt der x, y, z die neuen Koordinaten x, y_0, z_0 einführen. Denn ein jeder Punkt von G ist ja durch seine Abszisse x und durch Angabe desjenigen Punktes y_0, z_0 der Ebene $x = x_0$ bestimmt, in welchem die ihn passierende Charakteristik diese Ebene trifft.

Die Charakteristiken bekommen nun die Gleichungen $y_0 =$ konst. und $z_0 =$ konst. Daher gehen bei dieser Transformation die Differentialgleichungen (4) der Charakteristiken in die Gleichungen $\frac{dy_0}{dx} = 0$, $\frac{dz_0}{dx} = 0$ über. Es ist auch leicht zu übersehen, was bei der Transformation aus der partiellen Differentialgleichung (3) wird. Die Flächenelemente von (3) waren beliebige durch die Tangenten der Charakteristiken gehende Ebenen. Daraus werden nun Flächenelemente durch die Parallelen zur x_0-Achse. Deren Koordinate p_0 ist also stets Null, während die Koordinate q_0 ganz beliebig ist. Daher muß $p_0 = 0$ die transformierte partielle Differentialgleichung sein. Ihr genügen also beliebige von x unabhängige Funktionen: $z_0 = w(y_0)$. Dies sind also die Integrale. Dabei darf $w(y_0)$ eine willkürliche Funktion sein, deren Stetigkeit wir voraussetzen, die aber nicht differenzierbar zu sein braucht, wenn sie der Differentialgleichung $\frac{\partial z_0}{\partial x} = 0$ genügen soll.

Nun zurück zu der Integralfläche, welche wir durch eine beliebige Raumkurve legen wollten. $z_0 = w(y_0)$ und $x_0 = w_1(y_0)$ seien die Gleichungen dieser Raumkurve. Dann ist sofort in $z_0 = w(y_0)$ eine Integralfläche gegeben und es leuchtet ein, daß man sie erhält, indem man durch die Punkte der Raumkurve die Charakteristiken, d. h. hier die Parallelen zur x_0-Achse legt. Freilich können hier Fälle eintreten, in welchen man doch zu keiner Integralfläche gelangt. Wenn etwa die gegebene Kurve selbst eine Charakteristik ist, so kommt offenbar keine Fläche heraus. Denn alle durch ihre Punkte gelegten Charakteristiken fallen dann zusammen. Es muß also vorausgesetzt werden, daß die gegebene Kurve keine Charakteristik ist. Des weiteren aber sollte unter einem Integral stets eine stetige eindeutige Funktion verstanden werden, welche stetige erste Ableitungen besitzt. Daher werde jetzt noch vorausgesetzt, daß $w(y_0)$ eine eindeutige stetige Funktion und daß auch die Ableitung stetig ist. Offenbar liefert die Kurve $z_0 = w(y_0)$ der Ebene $x = x_0$ dieselbe Integralfläche wie die gegebene $z_0 = w(y_0)$, $x = w_1(y_0)$. Sie ist die orthogonale Projektion der gegebenen auf diese Ebene. Ich will daher die weitere Erörterung an eine solche Kurve der Ebene $x = x_0$ anknüpfen. Ich will dabei weiter zur Vermeidung von Selbstdurchdringungen der Integralfläche an-

nehmen, daß diese Kurve keine Selbstüberkreuzung besitze und frei sei von Singularitäten wie Spitzen und dergleichen. Dann haben wir den Satz: *Durch jede stetig differenzierbare Kurve der Ebene $x = x_0$ geht genau eine mit stetigen ersten Ableitungen versehene Integralfläche der partiellen Differentialgleichung* (3). Man erhält sie, indem man durch die Punkte der gegebenen Kurve die Charakteristiken legt. Man kann also die Fläche durch G verfolgen. Macht man nämlich die Transformation rückgängig, so wird aus der Integralfläche von $p_0 = 0$ eine von (3).

Die Frage, ob es auch durch nicht stetig differenzierbare Kurven $z_0 = w(y_0)$ Integralflächen geben kann, wird durch unsere Überlegungen nicht berührt, da wir die Differenzierbarkeit von $w(y_0)$ forderten, ohne zu prüfen, ob diese Forderung *notwendig* ist. Es genügte uns, so zu dem aufgestellten Satz zu gelangen.

Daß aber *nur* eine mit stetigen ersten Ableitungen versehene Integralfläche durch die gegebene Kurve gehen kann, folgt aus der S. 205 angestellten Betrachtung, wonach die durch die Punkte der gegebenen Kurve gehenden eindeutig bestimmten Charakteristiken alle auf der Integralfläche liegen.

Ich mache zu dem Satz noch diesen nützlichen Zusatz: *Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung* (3) *analytisch sind und wenn in der Gleichung der Anfangskurve $z_0 = w(y_0)$ die Funktion $w(y_0)$ analytisch ist, so ist auch die dadurch bestimmte Lösung analytisch.* Dies folgt aus den Sätzen von S. 44 über die analytische Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangsbedingungen genau so, wie hier der stetige und stetig differenzierbare Charakter der Integralflächen aus den entsprechenden Voraussetzungen und Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen folgte.

An unserem Satze fällt sofort auf, daß in die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen willkürliche Funktionen eingehen, und daß eine Lösung durch Angabe einer Anfangskurve bestimmt werden kann. So ist also hier das Analogon zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen beschaffen. Damals gingen willkürliche Konstanten in die Lösungen ein und diese wurden durch einen Anfangspunkt festgelegt.

Dies Eingehen willkürlicher Funktionen mag noch bei einem Spezialfall etwas näher betrachtet werden. Es sei die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

vorgelegt. Die Charakteristiken bestimmen sich jetzt aus den Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y),$$

$$\frac{dz}{dx} = 0.$$

Auf den Charakteristiken ist also jetzt $z = \text{konst.}$ Sie können somit als Höhenlinien der Integralflächen angesprochen werden. Nun seien

$$y_0 = \psi_1(x_0,\ x,\ y),\ z_0 = z$$

die Charakteristiken. Man sieht sofort, daß

$$z = \psi_1(x_0,\ x,\ y)$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung ist. Es ist nämlich die durch die Kurve $z_0 = y_0$ der Ebene $x = x_0$ gehende Integralfläche. Man rechnet auch sofort nach, daß die angegebene Funktion der partiellen Differentialgleichung genügt. Denn differenziert man längs einer Charakteristik nach x, so erhält man

$$0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$$

und das bedeutet, daß ψ_1 der partiellen Differentialgleichung (7) genügt. Legt man aber durch die stetig differenzierbare Kurve $z_0 = w(y_0)$ der Ebene $x = x_0$ die Integralfläche, so wird diese $z = w\{\psi_1(x_0, x, y)\}$. In der Tat stellt ja auch die Gleichung $w(\psi_1) = \text{konst.}$ dieselbe Kurvenschar der x-y-Ebene dar, wie die Gleichung $\psi_1 = \text{konst.}$ Wenn also $z = \psi(x, y)$ irgendein Integral der partiellen Differentialgleichung (7) ist, so ist auch $z = w(\psi)$ ein solches, und zwar bei willkürlich gelassenem stetig differenzierbarem eindeutigen w und passender Wahl von ψ das allgemeinste. Der Leser vergl. hierzu die Darlegungen, die wir S. 14 zum Zwecke der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen anstellten.

Ich füge noch an, daß z. B. das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}g + \frac{\partial u}{\partial z}h = 0 \tag{8}$$

in der Form $u = w(\psi_1,\ \psi_2)$ geschrieben werden kann. Dabei ist $w(t_1, t_2)$ eine willkürliche Funktion zweier Variablen und $u = \psi_1(x, y, z)$ und $u = \psi_2(x, y, z)$ sind zwei voneinander unabhängige Integrale der Differentialgleichung, d. h. zwei Integrale, von welchen nicht das eine als Funktion des anderen aufgefaßt werden kann. Man gewinnt dies Ergebnis leicht aus der Betrachtung der Differentialgleichungen der Charakteristiken. Diese sind jetzt

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y, z),\quad \frac{dz}{dx} = h(x, y, z),\quad \frac{du}{dx} = 0.$$

Als ψ_1 und ψ_2 kann man z. B. die Funktionen wählen, mit deren Hilfe sich die Charakteristiken so aufschreiben lassen

$$\begin{aligned} y_0 &= \psi_1(x_0, x, y, z),\\ z_0 &= \psi_2(x_0, x, y, z),\\ u_0 &= u. \end{aligned}$$

Noch eine letzte Bemerkung: Stellt man ein Integral von (3) durch eine Gleichung $u(x, y, z) = 0$ dar, so ist $u = u(x, y, z)$ ein Integral von (8) und umgekehrt. Es sei eine kleine Rechenübung für den Leser, diese Behauptung nachzuprüfen. Man wird außerdem bemerken, daß man so jede Differentialgleichung

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

in die Form

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

überführen kann, eine Gleichung also, in der die unbekannte Funktion u nur in ihren Ableitungen eingeht.

Beispiel. Wenn die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, so ist f eine Funktion von φ. Denn die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

besitzt das Integral

$$z = w\{\varphi\},$$

wo $w\{\varphi\}$ eine willkürliche stetig differenzierbare Funktion von φ bedeutet. Weiter ist $z = f(x, y)$ ein Integral. Dies läßt sich aber auf die Form $z = w\{\varphi\}$ bringen. Man bestimme nämlich $w\{\varphi\}$ aus $w\{\varphi(x_0, y_0)\} = f(x_0, y_0)$, indem man dabei x_0 als fest, y_0 als variabel ansieht. Durch die angegebene Gleichung ist jedenfalls $w\{\varphi\}$ als eindeutige stetig differenzierbare Funktion in jedem Intervall der y_0 bestimmt, in dem $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ nicht verschwindet. Man kann bei dieser Überlegung auch x_0 und y_0 in ihren Rollen vertauschen und erkennt so, daß f eine Funktion von φ ist, in der Umgebung einer jeden Stelle, wo die partiellen Ableitungen von φ nicht beide verschwinden.

Daher ist

$$z = w\{\varphi\}$$

das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung. Auch der Satz über die Funktionaldeterminante ist damit bewiesen.

§ 3. Die allgemeine Gleichung erster Ordnung.

Wir verfolgen auch hier den Gedanken, der schon im vorigen Paragraphen der Theorie der linearen Gleichung zugrunde lag, und den wir am Schluß des ersten Paragraphen formuliert haben. Wir betrachten irgendeine Integralfläche. Auf ihr wählen wir einen beliebigen Punkt. Das Element dieser Fläche in diesem Punkt gehört

einem gewissen Kegel von Flächenelementen an, welche alle der gegebenen partiellen Differentialgleichung genügen. Diese sei

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

f möge dabei in einem Bereich B der x, y, z, p, q die S. 201 aufgezählten Eigenschaften besitzen. Das Flächenelement wird eine bestimmte Mantellinie des Kegels berühren. Durch dieselbe wird auf der Fläche eine bestimmte Fortschreitungsrichtung festgelegt. Wir werden diese Richtung bestimmen und erhalten so auf der Fläche Differentialgleichungen einer Kurvenschar. Dann aber wird sich ein Unterschied gegen den linearen Fall ergeben. Dort konnten die so festgelegten Charakteristiken auch ohne Kenntnis der Integralfläche aus diesen Differentialgleichungen bestimmt werden. Denn jedem Raumpunkt war da ganz unabhängig von der gewählten Integralfläche nur eine bestimmte Richtung zugeordnet, weil der Kegel in ein Büschel ausartete, dessen Trägergrade die angegebene Richtung festlegte. Hier aber ist jedem Punkt ein ganzer Kegel von möglichen Richtungen zugeteilt. Man kann aber annehmen, daß man eine Auswahl unter diesen Fortschreitungsrichtungen wird treffen können, wenn man statt der charakteristischen Kurven die charakteristischen Streifen betrachtet. Denn dann hat man in der Streifenbedingung $z' = px' + qy'$ das Fortschreitungsgesetz der Streifenebenen zur Verfügung und mit deren Hilfe wird man dann die richtigen Mantellinien ausfindig machen können. Wir schreiten zur Durchführung.

Zunächst bestimmen wir die Mantellinien des Kegels, der von denjenigen Integralelementen umhüllt wird, deren Trägerpunkt der Punkt x, y, z ist. Soll der Punkt $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ auf der Ebene mit den Koordinaten P, Q liegen, so muß die Beziehung

$$P\xi + Q\eta - \zeta = 0$$

bestehen. Andererseits lautet die in Ebenenkoordinaten P, Q geschriebene Gleichung derjenigen Punkte, in welchen das Flächenelement p, q den Kegel berührt

$$P\frac{\partial f}{\partial p} + Q\frac{\partial f}{\partial q} - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Der Vergleich beider Gleichungen führt zu der Proportion

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

als Gleichung der auf dem Element p, q gelegenen Mantellinie. Somit muß für eine Kurve $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, welche im Punkte x, y, z diese Mantellinie berühren soll — das wird ja von den Charakteristiken verlangt — die Proportion

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} : \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

bestehen. Nun wählen wir den Kurvenparameter t so, daß

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p}$$

ist. Dann haben wir bis jetzt diese 3 Gleichungen[1]):

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_p, \\ \frac{dy}{dt} = f_q, \\ \frac{dz}{dt} = p f_p + q f_q. \end{cases}$$

Gehen wir nun wieder zurück zu der Integralfläche, auf der wir einen charakteristischen Integralstreifen bestimmen wollten. Sie genügt der Gleichung (1). Daher sind auch die Gleichungen richtig, welche sich hieraus durch Differentiation nach x und nach y ergeben:

$$f_x + f_z \cdot p + f_p \cdot p_x + f_q \cdot q_x = 0,$$
$$f_y + f_z \cdot q + f_p \cdot p_y + f_q \cdot q_y = 0.$$

$x = x(t), \ldots, q = q(t)$ seien nun die Gleichungen des gesuchten Streifens. Dann müssen für diesen auch die beiden eben aufgeschriebenen Gleichungen erfüllt sein. Das führt nach Berücksichtigung von $q_x = p_y$ und von (2) zu

$$f_x + f_z \cdot p + \frac{dp}{dt} = 0,$$

$$f_y + f_z \cdot q + \frac{dq}{dt} = 0.$$

Also haben wir nun im ganzen für die 5 Streifenkoordinaten x, y, z, p, q die 5 Differentialgleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = f_p, \\ y' = f_q, \\ z' = p f_p + q f_q, \\ p' = -f_x - p f_z, \\ q' = -f_y - q f_z. \end{cases}$$

Unter geringer Abänderung des bisherigen Sprachgebrauches *definiere* ich nun: *Unter einem charakteristischen Streifen ist ein Streifen zu verstehen, welcher diesen 5 Differentialgleichungen* (3) *genügt.*

Inwieweit ein solcher Streifen tatsächlich die Eigenschaften besitzt, von denen wir vorhin ausgingen, wird nun weiter zu überlegen sein. Zuvor aber müssen wir die Voraussetzungen angeben, auf die wir uns weiter stützen wollen. In einem gewissen Bereiche der

[1]) Der Kürze halber bezeichnen wir dabei die Ableitungen von f durch angefügte Fußmarken, also z. B. $f_p = \frac{\partial f}{\partial p}$ usw.

x, y, z, p, q sei $f(x, y, z, p, q)$ samt seinen Ableitungen der *beiden* ersten Ordnungen eindeutig und stetig. Es sei außerdem, wie wir schon S. 201 festlegten, für die zu betrachtenden Flächenelemente[1]) nicht auch noch $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial q} = 0$. Die Voraussetzung betreffend die Ableitungen der *beiden* ersten Ordnungen hat zur Folge, daß wieder alle die Stetigkeitssätze über die Lösungen des Systems (3) von gewöhnlichen Differentialgleichungen verfügbar werden, von denen auch im vorigen Paragraphen Gebrauch gemacht wurde. Die bloße Stetigkeit der ersten Ableitungen würde dazu nicht reichen.

Als erste Frage legen wir uns die vor, ob jeder charakteristische Streifen ein Integralstreifen sei. Tragen wir, um das zu sehen, in die linke Seite von (1) die Koordinaten eines Streifens ein, so findet man durch Differentiation nach dem Streifenparameter t

$$f_x \cdot x' + f_y \cdot y' + f_z \cdot z' + f_p \cdot p' + f_q \cdot q'.$$

Nach den Differentialgleichungen (3) ist das aber Null. Somit hat f längs eines jeden charakteristischen Streifens einen konstanten Wert. Man drückt das auch dadurch aus, daß man sagt: *f sei ein Integral der Differentialgleichungen* (3). Wenn also ein charakteristischer Streifen durch ein Integralelement hindurchgelegt wird, so ist er ein Integralstreifen. Denn in diesem Anfangselement ist $f = 0$ und daher gilt längs des ganzen Streifens $f = 0$.

Wir suchen nun ähnlich wie bei den linearen Differentialgleichungen durch eine Anfangskurve eine Integralfläche zu legen. Wir wählen zu dem Zwecke eine Anfangskurve $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$. Dabei sollen diese 3 Funktionen samt ihren ersten Ableitungen in einem Intervalle $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ eindeutig und stetig sein. Unsere erste Aufgabe muß es nun sein, durch diese Anfangskurve einen Anfangsstreifen zu legen, damit wir zur Integration des Systems (3) die richtigen Anfangsbedingungen bekommen. Dieser Anfangsstreifen muß natürlich ein Integralstreifen sein. Zur Bestimmung der beiden weiteren Funktionen $p(\tau)$ und $q(\tau)$ des Anfangsstreifens bekommen wir somit die beiden Gleichungen

$$f(x(\tau), y(\tau), z(\tau), p(\tau), q(\tau)) = 0,$$
$$z'(\tau) - p(\tau) x'(\tau) - q(\tau) y'(\tau) = 0.$$

Um nach dem Satze über implizite Funktionen ihrer Auflösbarkeit sicher zu sein, muß man erst einmal in einem Punkt τ_0 eine Auf-

---

[1]) Flächenelemente, für die neben $f = 0$ auch $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial q} = 0$ ist, heißen *singulär*. Vgl. die entsprechende Definition bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

lösung p_0, q_0 besitzen[1]), und man muß weiter sicher sein, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial f}{\partial p} y'(\tau) - \frac{\partial f}{\partial q} x'(\tau)$$

längs des Kurvenbogens nicht verschwindet. Diese letztere Voraussetzung besagt, daß die *Anfangskurve nicht nur keine charakteristische Kurve sein soll, sondern daß sie nicht einmal einen der Kegel von Integralelementen berühren soll.* Die andere Bedingung besagt aber, daß ihre Richtung in einem Punkt zum zugehörigen Kegel so liegen soll, daß man durch sie eine Tangentialebene an den Kegel legen kann, eine Bedingung, die ganz und gar nicht immer erfüllt ist. Sind aber beide Bedingungen erfüllt, so erhält man anschließend an die gewählte zu τ_0 gehörige Lösung zwei in $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ samt den ersten Ableitungen stetig differenzierbare Funktionen $p(\tau)$, $q(\tau)$, die mit den drei gegebenen $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$ einen Anfangsstreifen von Integralelementen festlegen.

Wir haben damit durch die Anfangskurve einen stetig differenzierbaren Integralstreifen gelegt. Durch jedes seiner Flächenelemente geht nun ein einziger charakteristischer Streifen hindurch. Ich werde zeigen, daß diese Streifen alle einer Integralfläche angehören. Seien etwa

$$(4) \quad x = x(t, \tau), \; y = y(t, \tau), \; z = z(t, \tau), \; p = p(t, \tau), \; q = q(t, \tau)$$

die charakteristischen Streifen. Dann geben die drei ersten Funktionen eine Parameterdarstellung der durch die Charakteristiken gebildeten Fläche. Es ist nun aber zu beweisen, daß die beiden anderen Funktionen die Tangentialebenen der Fläche festlegen. Sowie wir das eingesehen haben, ist die Überzeugung, daß eine Integralfläche vorliegt, gefestigt.

Nach *Cauchy*, von dem die Theorie der Charakteristiken herrührt, erbringt man diesen Nachweis wie folgt. Man hat zu zeigen, daß für die 5 Funktionen diese beiden Gleichungen

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = p \frac{\partial x}{\partial \tau} + q \frac{\partial y}{\partial \tau}$$

richtig sind. Denn dann muß eben p die x-Ableitung, q die y-Ableitung von z sein. Die erste der beiden Gleichungen ist wegen des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen von selbst erfüllt. Die zweite aber ist wenigstens längs des Ausgangsstreifens richtig. Wenn wir den Parameterpunkt $t = 0$ der Charakteristiken stets auf

[1]) Das ist z. B. der Fall, wenn als Anfangskurve: $z = w(y)$ in der Ebene $x = x_0$, als Differentialgleichung eine von der Form $p = g(x, y, z, q)$ gewählt wird.

der Ausgangskurve wählen, so ist also die zweite Gleichung für $t = 0$ richtig. Um zu sehen, daß sie auch für die anderen t-Werte richtig ist, betrachten wir

$$H = \frac{\partial z}{\partial \tau} - p\frac{\partial x}{\partial \tau} - q\frac{\partial y}{\partial \tau}$$

und zeigen zunächst, daß

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist. Diese Ableitung wird nämlich[1])

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial \tau} - \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \tau} - p\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial \tau} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau} - q\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial \tau}.$$

Differenziert man aber (5) nach τ, so erhält man

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial \tau} - \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial t} - p\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial \tau} - \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial t} - q\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial \tau}.$$

Subtrahiert man dies von $\frac{\partial H}{\partial t}$, so bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau},\\ &= f_p\frac{\partial p}{\partial \tau} + f_q\frac{\partial q}{\partial \tau} + (f_x + p f_z)\frac{\partial x}{\partial \tau} + (f_y + q f_z)\frac{\partial y}{\partial \tau}.\end{aligned}$$

Da aber nun $f(x, y, z, p, q) = 0$ wird[2]), wenn man $x(t, \tau)$ usw. einträgt, so hat man noch

$$f_x\frac{\partial x}{\partial \tau} + f_y\frac{\partial y}{\partial \tau} + f_z\frac{\partial z}{\partial \tau} + f_p\frac{\partial p}{\partial \tau} + f_q\frac{\partial q}{\partial \tau} = 0.$$

Also wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= p f_z\frac{\partial x}{\partial \tau} + q f_z\frac{\partial y}{\partial \tau} - f_z\frac{\partial z}{\partial \tau},\\ &= -f_z \cdot H.\end{aligned}$$

Daher ist

$$H = H(0)\, e^{-\int_0^t f_z\, dt}.$$

Da aber nun, wie gesagt, $H(0) = 0$ ist, so ergibt sich hieraus, daß für alle t und τ

$$H = 0$$

ist. Damit haben wir erkannt, daß wir tatsächlich eine Integralfläche durch die Ausgangskurve legen können. Es fragt sich noch, ob es

[1]) Daß diese Ableitungen existieren, folgt aus unserer Annahme, daß $f(x, y, z, p, q)$ samt seinen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig sein soll. Daraus ergab sich schon, daß $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$ usw. stetige Ableitungen nach τ haben. Da aber nun z. B. $\frac{dx}{dt} = f_p(x, y, z, p, q)$ ist, so sieht man sofort, daß auch $\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{dx}{dt}\right)$ existiert und stetig ist. Vgl. auch S. 217.)

[2]) Weil dies für $t = 0$ gilt und weil f längs (3) konstant ist.

die einzige ist, oder ob es mehrere gibt. Wir werden erkennen, daß die Integralfläche eindeutig bestimmt ist, sowie man sich für einen bestimmten Anfangsstreifen durch die Anfangskurve entschieden hat. Hier hat man ja im allgemeinen die Wahl zwischen mehreren Möglichkeiten. Um also zu beweisen, daß es nur eine Integralfläche durch den Anfangsstreifen gibt, werde ich zeigen, daß 2 Integralflächen, welche ein nichtsinguläres Flächenelement $x_0\, y_0\, z_0\, p_0\, q_0$ gemeinsam haben, sich längs des ganzen durch dieses Element bestimmten charakteristischen Streifens berühren. Zu diesem Zwecke betrachte ich die folgende durch den Trägerpunkt des gemeinsamen Elementes gehende Kurve auf einer jeden der beiden Integralflächen: Die x-y-Projektion der Kurve soll den Bedingungen

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_p(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_q(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) \end{cases}$$

genügen. Für diese ist dann naturgemäß

$$\frac{dz}{dt} = p f_p + q f_q$$

und längs derselben ist dann nach der S. 211 angestellten Überlegung auch

$$\frac{dp}{dt} = -f_x - f_z p,$$

$$\frac{dq}{dt} = -f_y - f_z q.$$

D. h. also, an jenes gemeinsame Element schließt sich auf beiden Flächen derjenige charakteristische Streifen an, der durch das gemeinsame Element bestimmt ist. Die Überlegung kann versagen, wenn das gegebene Element singulär ist, weil dann in ihm f_p und f_q verschwinden. Dann liegt nämlich ein singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_q}{f_p}$$

vor, welche mit den beiden vorhin angeschriebenen gleichbedeutend ist. Es ist ja dann unsicher, ob durch den Punkt x_0, y_0 eine Lösung geht. Zwar haben die Gleichungen (7) Lösungen, die für $t = t_0$ die Werte $x = x_0$, $y = y_0$ haben. Indessen fallen dieselben für alle t mit $x = x_0$, $y = y_0$ zusammen.

Wir wollen zusammenfassen und zugleich noch einmal die Voraussetzungen hervorheben, die man machen muß, damit alle vorgenommenen Operationen legal sind. Auch soll der Bereich der x-y-Ebene festgestellt werden, für den wir die partielle Differentialgleichung gelöst haben. In einem gewissen Bereich (B) des x-y-z-p-q-Raumes möge $f(x, y, z, p, q)$ samt seinen partiellen Ableitungen erster

und zweiter Ordnung endlich und stetig sein. Dadurch wird erreicht, daß für die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen alle die Voraussetzungen erfüllt sind, die wir früher für die Integration der Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen gemacht haben. Wenn z. B. $f(x, y, z, p, q)$ und die Ableitungen, sowie die rechten Seiten der gewöhnlichen Differentialgleichungen für

$$(K) \quad |x - x_0| < d, \quad |y - y_0| < d, \quad |z - z_0| < d, \quad |p - p_0| < d, \quad |q - q_0| < d$$

dem Betrage nach unter $M > 1$ liegen, so geht durch das *nichtsinguläre* Flächenelement x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 ein einziger Streifen, welcher den Ungleichungen

$$(8) \quad |x - x_0| < \frac{d}{M}, \quad |y - y_0| < \frac{d}{M}, \quad |z - z_0| < \frac{d}{M}, \quad |p - p_0| < \frac{d}{M}, \quad |q - q_0| < \frac{d}{M}$$

genügt. Es möge nun ein von singulären Elementen freier Anfangsstreifen in (K) gegeben sein:

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad p = p(\tau), \quad q = q(\tau) \quad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta).$$

Die 5 Funktionen mögen eindeutig sein und stetige Ableitungen besitzen. Ferner sei d der Abstand des Streifens vom Rand des Körpers K.

Dann geht durch jedes Element τ des Anfangsstreifens ein einziger charakteristischer Streifen $x = x(t, \tau)$ usw., der den Bedingungen

$$|x(t, \tau) - x(\tau)| < \frac{d}{M} \text{ usw.}$$

genügt. Diese Streifen ergeben in ihrer Gesamtheit eine Integralfläche (4).

Der Nachweis, daß hiermit eine Integralfläche gewonnen ist, benutzte auf S. 214 die ersten Ableitungen der 5 Funktionen nach t und τ sowie die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial \tau}$$

nebst der Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge. Tatsächlich folgt aus unseren Annahmen, daß die genannten ersten Ableitungen stetig sind und daß

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

stetig ist. Daraus ergibt sich aber bekanntlich die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen. Daß die ersten Ableitungen der 5 Funktionen nach τ stetig sind, wurde S. 212 schon erwähnt. Daß die ersten Ableitungen nach t stetig sind, ergibt sich aus den Differentialgleichungen sofort, da durch diese ja $\frac{dx}{dt}$ usw. durch $x(t)$

usw. selbst dargestellt sind. Daher ergibt die Differentiation der Differentialgleichungen nach τ auch die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ usw.

Durch den Anfangsstreifen geht daher eine einzige Integralfläche. Diese Aussage ist im folgenden Sinne zu verstehen: Zwei Integralflächen, welche den Anfangsstreifen enthalten, enthalten auch die ganzen an seine Elemente anschließenden charakteristischen Streifen für

$$|x(t, \tau) - x(\tau)| < \frac{d}{M} \text{ usw.}$$

Wenn man die hiermit abgeschlossene allgemeine Theorie auf die früher behandelten speziellen Fälle anwendet, so findet man die damaligen Resultate wieder. Das möge etwa an

$$p + f(x, y)\, q = g(x, y)$$

kurz dargelegt werden. Für die charakteristischen Streifen findet man zunächst die 5 Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dz}{dt} = g, \quad \frac{dp}{dt} = -qf_x + g_x, \quad \frac{dq}{dt} = -qf_y + g_y.$$

Da aber die 3 ersten nur x, y, z enthalten, so können sie zur Bestimmung der charakteristischen *Kurven* dienen und man kann daher auf die beiden letzten verzichten, da schon diese Kurven zum Aufbau der Integralflächen ausreichen.

Immerhin mag es auffallen, daß wir damals eine von 2 Integrationskonstanten abhängige, also zweiparametrige Schar von charakteristischen Kurven erhielten, während wir im allgemeinen Falle eine dreiparametrige Schar von charakteristischen Streifen bekommen. Der Grund dafür ist der, daß in jenen speziellen Fällen durch jede charakteristische Kurve eine einparametrige Schar von charakteristischen Streifen geht, während im allgemeinen Fall verschiedene charakteristische Streifen auch längs verschiedenen Kurven aufgereiht sind.

§ 4. Über die Integration der für die charakteristischen Streifen aufgestellten Differentialgleichungen.

Jede Beziehung

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0,$$

die als Identität in t zwischen den 5 Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$ besteht, welche den charakteristischen Gleichungen genügen, nennen wir ein Integral derselben. Ein solches Integral kennen wir schon lange:

$$f(x, y, z, p, q) = c.$$

Wir haben ja schon auf S. 212 festgestellt, daß längs eines jeden charakteristischen Streifens $f(x, y, z, p, q)$ einen festen Wert hat. Da uns aber nur Integralstreifen interessieren, so lautet unser erstes Integral:

(1) $$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Die Sache ist nun die, daß man nun eigentlich noch 4 weitere Integrale nötig hätte, um die fünf unbekannten Funktionen bestimmen zu können. Man kann aber beweisen, *daß durch die Kenntnis eines weiteren von* (1) *unabhängigen Integrals das System der fünf Differentialgleichungen* (3) *auf* S. 211 *auf ein anderes System von nur zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann.* Die Bestimmung aller Integralflächen der partiellen Differentialgleichung läuft dann auf Eliminationsprozesse heraus. Sei nämlich

$$f_1(x, y, z, p, q) = a \tag{2}$$

ein weiteres Integral, so kann man im allgemeinen p und q aus den zwei Gleichungen (1), (2) ausrechnen und erhält dann zwei Differentialgleichungen[1]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x, y, z) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \varphi_2(x, y, z). \end{cases} \tag{3}$$

Ihre Integration kann (§ 5) auf die zweier gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Damit die Auflösung der zwei Gleichungen nach p, q möglich sei, darf die Funktionaldeterminante[2])

$$\begin{vmatrix} f_p & f_q \\ f_{1p} & f_{1q} \end{vmatrix}$$

nicht identisch in x, y, z, p, q verschwinden. Das meinen wir, wenn wir sagen, die zwei Integrale sollten voneinander unabhängig sein. Das Verschwinden der Funktionaldeterminante würde nämlich bedeuten, daß man eine der zwei Funktionen f, f_1 als Funktion der anderen auffassen kann. Wir beschränken nun überdies die Betrachtung auf die Umgebung solcher Flächenelemente, für die die Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Die φ_1 und φ_2 sind ihrer Herkunft nach in einem gewissen weiter zugrunde zu legenden Bereich mit ihren Ableitungen der vier ersten Ordnungen stetig.

Damit es nun aber Funktionen $z(x, y)$ gebe, die den beiden Gleichungen (3) genügen, muß eine Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\varphi_1$$

---

[1]) Der Kürze der Darstellung zuliebe sei im folgenden angenommen, daß f, f_1, f_2 usw. in einem gewissen Bereich B der x, y, z, p, q viermal stetig differenzierbar seien. An sich würde oft auch die Existenz einer geringeren Zahl von Ableitungen ausreichen. Ich möchte aber keinen Wert darauf legen, diese Seite der Sache zu weit ins einzelne zu verfolgen.

[2]) Mit f_{1p}, f_{1q} usw. bezeichne ich im folgenden die Ableitungen von f_1 nach p, q usw.

erfüllt sein. Differenziert man aber die beiden Gleichungen (1) und (2), durch deren Auflösung nach p und q ja (3) entstand, nach x und y, so erhält man:

$$f_x + f_z \cdot p + f_p \cdot p_x + f_q \cdot q_x = 0 \qquad f_y + f_z \cdot q + f_p \cdot p_y + f_q \cdot q_y = 0$$
$$f_{1x} + f_{1z} \cdot p + f_{1p} \cdot p_x + f_{1q} \cdot q_x = 0 \qquad f_{1y} + f_{1z} \cdot q + f_{1p} \cdot p_y + f_{1q} \cdot q_y = 0 .$$

Bestimmt man hieraus p_y und q_x und setzt die gefundenen Werte einander gleich, so erhält man die Integrabilitätsbedingung

$$(4') \qquad [f, f_1] \equiv (f_y + f_z \cdot q) f_{1q} - f_q (f_{1y} + f_{1z} \cdot q) + f_{1p} (f_x + f_z p) - (f_{1x} + f_{1z} \cdot p) f_p = 0$$

oder anders geschrieben:

$$(4) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot f_p + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot f_q + \frac{\partial f_1}{\partial z} (p f_p + q f_q) + \frac{\partial f_1}{\partial p} (- f_x - f_z p) + \frac{\partial f_1}{\partial q} (- f_y - f_z q) = 0 .$$

Sie besagt also, daß

$$f_1 (x, y, z, p, q)$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung (4) sein muß, wenn die beiden Gleichungen (1) und (2), oder was dasselbe ist, die beiden Gleichungen (3) durch ein und dieselbe Funktion $z(x, y)$ sollen erfüllt werden können.

Die Gleichung (4) bringt aber gerade zum Ausdruck, daß (2) ein Integral des Systems der charakteristischen Differentialgleichungen ist. Schreibt man nämlich die Bedingung hierfür auf, so erhält man gerade (4). Jede Funktion $f_1 (x, y, z, p, q)$, die dieser linearen partiellen Differentialgleichung genügt, nimmt also längs eines jeden charakteristischen Streifens einen konstanten Wert an. So haben wir erkannt, daß für unsere beiden Gleichungen (3) die Integrabilitätsbedingung stets erfüllt ist.

Damit haben wir beiläufig den schon aus den Betrachtungen von S. 208 ersichtlichen Satz gewonnen, daß die Integration der charakteristischen Differentialgleichungen mit der Integration der angegebenen linearen partiellen Differentialgleichung gleichwertig ist. Aus ihr kann man also Funktionen f_1, wie wir sie gerade eben herangezogen haben, gewinnen. Kennt man ein solches $f_1 (x, y, z, p, q)$, so kann man nach unseren Darlegungen erwarten, daß sich gewisse Integralflächen von (1) durch Integration des Systems (3) gewinnen lassen. Ob und wie dies zu bewerkstelligen ist, soll erst im folgenden Paragraphen dargelegt werden. Dabei wird sich auch ergeben, welchen Nutzen die Kenntnis gemeinsamer Integrale der beiden partiellen Differentialgleichungen für die Bestimmung der Charakteristiken besitzt.

Man nennt $[f, f_1]$ einen *Klammerausdruck* und sagt, f und f_1 lägen in *Involution*, wenn $[f, f_1] = 0$ ist. Da $[f_1, f] = - [f, f_1]$, so ist

$f =$ konst. auch ein Integral der zu $f_1 = 0$ gehörigen charakteristischen Differentialgleichungen.

Bemerkung. Unsere Betrachtungen beweisen gleichzeitig noch einen etwas anderen Satz: Jedes gemeinsame Integral zweier partiellen Differentialgleichungen $F = 0$ und $F_1 = 0$ genügt auch der Gleichung $[F, F_1] = 0$. Ist diese also nicht wie in den Fällen, auf die es uns eben ankommt, identisch erfüllt, so ist sie eine neue Gleichung für die gesuchten gemeinsamen Integrale und wir haben damit jetzt 3 Gleichungen, welchen dieselben genügen müssen Nunmehr aber kann man offenbar schon durch reine Eliminationsprozesse entscheiden, ob überhaupt ein gemeinsames Integral vorhanden ist.

Man kann die Integrationsarbeit ganz sparen, wenn man noch ein weiteres Integral f_2 von $[f, \varphi] = 0$ kennt, das überdies mit f_1 in Involution liegt. Denn dann gelten für die charakteristischen Integralstreifen die 3 Gleichungen

$$f = 0, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2 .$$

Kann man sie nach p, q, z auflösen, so hat man damit ein von 2 Parametern abhängendes Integral von $f = 0$ ohne jede Integrationsarbeit. Um das einzusehen, differenziere man die 3 Gleichungen nach x und y. So erhält man

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ f_x + f_z \cdot p + f_z(z_x - p) + f_p \cdot p_x + f_q q_x = 0,\\
&\text{b)}\ f_{1x} + f_{1z} p + f_{1z}(z_x - p) + f_{1p} p_x + f_{1q} q_x = 0,\\
&\text{c)}\ f_{2x} + f_{2z} p + f_{2z}(z_x - p) + f_{2p} p_x + f_{2q} q_x = 0,\\
&\text{d)}\ f_y + f_z q + f_z(z_y - q) + f_p p_y + f_q q_y = 0,\\
&\text{e)}\ f_{1y} + f_{1z} q + f_{1z}(z_y - q) + f_{1p} p_y + f_{1q} q_y = 0,\\
&\text{f)}\ f_{2y} + f_{2z} q + f_{2z}(z_y - q) + f_{2p} p_y + f_{2q} q_y = 0.
\end{aligned}$$

Man multipliziere a) mit $\frac{\partial f_1}{\partial p}$, d) mit $\frac{\partial f_1}{\partial q}$, b) mit $\frac{\partial f}{\partial p}$, e) mit $\frac{\partial f}{\partial q}$. Dann berechne man

$$\text{a)} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial p} + \text{d)} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial q} - \text{b)} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \text{e)} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Das liefert

$$\begin{aligned}
&[f, f_1] + (z_x - p)(f_z f_{1p} - f_{1z} f_p) + (z_y - q)(f_z f_{1q} - f_{1z} f_q)\\
&\quad + (q_x - p_y)(f_q f_{1p} - f_{1q} f_p) = 0 .
\end{aligned}$$

Ebenso findet man analoge Relationen durch Verbindung von f mit f_2, und f_1 mit f_2. Da aber die 3 Funktionen f, f_1, f_2 in Involution liegen, so kommen schließlich diese linearen Gleichungen heraus.

$$\begin{aligned}
\text{I.}\ &(z_x - p)(f_z f_{1p} - f_{1z} f_p) + (z_y - q)(f_z f_{1q} - f_{1z} f_q)\\
&\quad + (q_x - p_y)(f_q f_{1p} - f_{1q} f_p) = 0 ,\\
\text{II.}\ &(z_x - p)(f_z f_{2p} - f_{2z} f_p) + (z_y - q)(f_z f_{2q} - f_{2z} f_q)\\
&\quad + (q_x - p_y)(f_q f_{2p} - f_{2q} f_p) = 0 ,\\
\text{III.}\ &(z_x - p)(f_{1z} f_{2p} - f_{2z} f_{1p}) + (z_y - q)(f_{1z} f_{2q} - f_{2z} f_{1q})\\
&\quad + (q_x - p_y) f_{1q} f_{2p} - f_{2q} f_{1p}) = 0 .
\end{aligned}$$

Um zu erkennen, daß nach diesen Gleichungen $z_x = p$, $z_y = q$, $q_x = p_y$ sein muß, kann man sich entweder auf das aus bekannten Determinantensätzen folgende Nichtverschwinden der Determinante dieses Gleichungssystems berufen oder aber man kann den folgenden Weg einschlagen: Man füge noch die wegen des Verschwindens sämtlicher Koeffizienten richtigen Gleichungen hinzu, die sich ergeben, wenn man f oder f_1 oder f_2 je mit sich selbst kombiniert. Dann betrachte man z. B. die drei Gleichungen: I, II von oben und

$$(z_x - p)(f_z f_p - f_p f_z) + (z_y - q)(f_z f_q - f_q f_z) + (q_x - p_y)(f_q f_p - f_p f_q) = 0.$$

Diese drei Gleichungen kann man auch so schreiben:

$$\begin{aligned} 0 = &- f_{1z}\{f_p(z_x - p) + f_q(z_y - q)\} + f_{1p}\{f_z(z_x - p) + f_q(q_x - p_y)\} \\ &+ f_{1q}\{f_z(z_y - q) - f_p(q_x - p_y)\}, \\ 0 = &- f_{2z}\{f_p(z_x - p) + f_q(z_y - q)\} + f_{2p}\{f_z(z_x - p) + f_q(q_x - p_y)\} \\ &+ f_{2q}\{f_z(z_y - q) - f_p(q_x - p_y)\}, \\ 0 = &- f_z\{f_p(z_x - p) + f_q(z_y - q)\} + f_p\{f_z(z_x - p) + f_q(q_x - p_y)\} \\ &+ f_q\{f_z(z_y - q) - f_p(q_x - p_y)\}. \end{aligned}$$

Da aber die Funktionaldeterminante von f, f_1, f_2 nach z, p, q nicht verschwinden soll, so folgt hieraus

$$\begin{aligned} f_p(z_x - p) + f_q(z_y - q) &= 0, \\ f_z(z_x - p) + f_q(q_x - p_y) &= 0, \\ f_z(z_y - q) - f_p(q_x - p_y) &= 0. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man drei weitere Gleichungen in welchen f_1 oder f_2 die Stelle von f einnehmen. Da nun aber die Funktionaldeterminante

$$\frac{d(f, f_1, f_2)}{d(z, p, q)} \neq 0$$

sein soll, so muß mindestens eine zweireihige Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} f_p & f_q \\ f_{1p} & f_{1q} \\ f_{2p} & f_{2q} \end{pmatrix}$$

von Null verschieden sein. Es sei z. B.

$$\begin{vmatrix} f_p & f_q \\ f_{1p} & f_{1q} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dann folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_p(z_x - p) + f_q(z_y - q) &= 0 \\ f_{1p}(z_x - p) + f_{1q}(z_y - q) &= 0, \end{aligned}$$

daß $z_x = p$, $z_y = q$ ist. Ebenso schließt man $q_x = p_y$.

§ 5. Überbestimmte Systeme von partiellen Differentialgleichungen.

Für eine unbekannte Funktion mögen zwei partielle Differentialgleichungen vorgelegt sein. Man nennt das System überbestimmt, um auszudrücken, daß die Zahl der unbekannten Funktionen kleiner ist als die Zahl der Gleichungen. Es handelt sich darum, die gemeinsamen Integrale dieser beiden Differentialgleichungen zu finden. Man überzeugt sich leicht, daß nicht immer solche gemeinsame Integrale vorhanden sind. Denn man darf annehmen, und das wollen wir tun, daß die beiden Gleichungen nach $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ aufgelöst seien. Es sei das System

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_2(x, y, z) \end{cases}$$

gegeben. φ_1 und φ_2 sollen dabei samt ihren partiellen Ableitungen der vier ersten Ordnungen in einem gewissen Bereiche B des x-y-z-Raumes eindeutig und stetig sein. Dann leuchtet ein, daß es nur dann stetige Funktionen $z(x, y)$ geben kann, die diesen beiden Differentialgleichungen genügen, wenn das Gesetz von der Vertauschung der Reihenfolge der Differentiationsfolge erfüllt ist. Das liefert die „Integrabilitätsbedingung“

$$\varphi_{1y} + \varphi_{1z}\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_{2x} + \varphi_{2z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

oder

$$(1') \qquad \varphi_{1y} + \varphi_{1z}\cdot\varphi_2 = \varphi_{2x} + \varphi_{2z}\cdot\varphi_1.$$

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem diese Gleichung identisch in x, y, z, p, q erfüllt ist oder nicht. Im letzteren Falle ist sie, wie wir schon im vorigen Paragraphen hervorhoben, eine neue Gleichung für ein eventuelles gemeinsames Integral der beiden gegebenen Gleichungen (1) und man kann nun durch reine Eliminationsprozesse entscheiden, ob die beiden Gleichungen überhaupt gemeinsame Integrale haben. Man kann ja die drei Gleichungen (1) (1′) z. B. als drei Gleichungen für z, p, q auffassen.

Der andere Fall, den wir weiter betrachten wollen, ist der, daß diese Gleichung (1′) identisch erfüllt ist.

Zur Bewältigung des Integrationsproblemes kann man ähnlich verfahren, wie in dem bekannten Fall der Quadratur, wo z nicht selbst vorkommt. Wir sehen also erst einmal in der ersten der beiden Gleichungen y als Parameter an. Sie ist dann als gewöhnliche Diffe-

rentialgleichung für eine Funktion $z(x)$ aufzufassen. Ihr allgemeines Integral sei

$$z = \varphi(x, y, x_0, z_0) \quad \text{oder} \quad z_0 = \varphi(x_0, y, x, z). \tag{2}$$

Hier kann natürlich die Integrationskonstante z_0 eine beliebige Funktion des Parameters y sein. Es sei etwa

$$z_0 = u(y)$$

gesetzt. Dann ist weiter $u(y)$ so zu bestimmen, daß

$$z = \varphi(x, y, x_0, u(y))$$

auch der zweiten Gleichung (1) genügt. Das führt auf die Bedingung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} = \varphi_2(x, y, \varphi[x, y, x_0, u(y)]).$$

Also wird

$$\frac{du}{dy} = \frac{\varphi_2(x, y, \varphi[x, y, x_0, u(y)]) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \tag{3}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Bestimmung von $u(y)$.[1]) Tatsächlich überzeugt man sich auf Grund der Integrabilitätsbedingung leicht, daß die rechte Seite dieser Gleichung nur von u und y abhängt, von x dagegen unabhängig ist. Dazu muß nämlich die x-Ableitung der rechten Seite verschwinden, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \left(\varphi_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u} = 0$$

sein. Da aber nun

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_1(x, y, \varphi)$$

ist, so ergibt sich auch

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Trägt man dies ein, so wird die zu verifizierende Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \cdot \varphi_2 \right) = 0.$$

Der Ausdruck in der Klammer verschwindet aber wegen der Integrabilitätsbedingung. Das allgemeine Integral dieser Gleichung (3) sei also

$$u = u(y, y_0, u_0) \quad \text{oder} \quad u_0 = u(y_0, y, u).$$

Dann wird

$$z = \varphi\{x, y, x_0, u(y, y_0, u_0)\} \quad \text{oder} \quad u_0 = u[y_0, y, \varphi\{x_0, y, x, z\}]$$

[1]) Diese beiden letztgenannten gewöhnlichen Differentialgleichungen sind die schon zu Beginn von § 4 auf S. 218 erwähnten.

die einparametrige Schar derjenigen Integralflächen, welche den beiden Gleichungen (1) genügen. Damit ist nun die Lösung von (1) und damit, wie schon § 4 angekündigt, die Lösung der charakteristischen Differentialgleichungen auf die von zwei gewöhnlichen zurückgeführt. Die Betrachtung führt unter Berücksichtigung der Ergebnisse des zweiten Kapitels aus dem ersten Abschnitt zu dem folgenden

Satz: *Durch jeden Punkt $x_0\, y_0\, z_0$ des Bereiches B geht genau eine Lösung des Systems (1), die eindeutig und stetig differenzierbar von x, y, x_0, y_0, z_0 abhängt.*

Es gibt noch eine zweite, die *Mayersche Methode* zur Integration der Gleichungen (1). Lassen schon die vorigen Darlegungen erwarten, daß durch jeden Punkt x_0, y_0, z_0 des zugrunde gelegten Bereiches genau eine Integralfläche geht, so läßt die jetzt darzulegende *Mayer*sche Methode besonders deutlich die Richtigkeit dieser Vermutung erkennen. Eine Stütze hat sie ja auch von vornherein in der Tatsache, daß die beiden Differentialgleichungen (1) jedem Raumpunkt genau ein Flächenelement zuordnen.

Die *Mayer*sche Methode geht darauf aus, unmittelbar die Schnittkurven zu bestimmen, die eine durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gelegte zur z-Achse parallele Ebene aus der Integralfläche ausschneidet. Die Gleichung einer solchen Ebene sei etwa

$$x - x_0 = \lambda t,$$
$$y - y_0 = \mu t.$$

Schneidet man sie mit der Fläche

$$z = z(x, y),$$

so erhält man für die Schnittkurve

$$z = z(x_0 + \lambda t,\ y_0 + \mu t).$$

Differenziert man nach t, so erhält man

$$\frac{dz}{dt} = \varphi_1(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t, z)\lambda + \varphi_2(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t, z)\mu$$

als Differentialgleichung der Schnittkurven. Für $t = 0$ wird $x = x_0$ und $y = y_0$. Daher benötigen wir diejenige eindeutig bestimmte Lösung, welche für $t = 0$ den Wert z_0 annimmt. Aus den so bestimmten Schnittkurven

$$x = x_0 + \lambda t,$$
$$y = y_0 + \mu t,$$
$$z = f(z_0, t, \lambda, \mu)$$

kann man dann durch Elimination von t und des Richtungsparameters $\lambda : \mu$ die Gleichung der Integralfläche gewinnen.

§ 6. Das vollständige Integral.

Wir knüpfen wieder an die in § 4 abgebrochenen Entwicklungen an. Inzwischen haben wir gelernt, wie man aus den dortigen Differentialgleichungen (3) das $z(x, y)$ bestimmt. Ihrer Herkunft aus (1) und (2) von § 4 entsprechend enthalten diese Gleichungen noch einen Parameter a, den wir hinfort mit a_1 bezeichnen wollen. Die Integration von (3) läßt einen weiteren Parameter a_2 hinzutreten. Wir erhalten also durch Integration von (3) eine zweiparametrige Schar

$$z = V(x, y, a_1, a_2) \tag{5}$$

von Integralflächen. Bei gegebenem a_1 kann man immer a_2 auf eine Weise so bestimmen, daß die Fläche durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$ geht. Wegen (2) kann man aber den Parameter a_1 so wählen, daß im Punkte $x_0 y_0 z_0$ dabei ein beliebiges der ihm durch (1) zugeordneten Flächenelemente auftritt. *Daher umfaßt die Schar* (5) *im zugrunde gelegten Bereiche sämtliche Flächenelemente der partiellen Differentialgleichung.* Daher nennt man (5) ein *vollständiges Integral* der partiellen Differentialgleichung (1) S. 217.

Aus dem vollständigen Integral muß man jedenfalls die ursprüngliche partielle Differentialgleichung wieder gewinnen können. Denn die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} z &= V(x, y, a_1, a_2), \\ p &= \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, a_1, a_2), \\ q &= \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, a_1, a_2) \end{aligned}\right. \tag{5'}$$

sind doch weiter nichts als eine auf die Parameter a_1, a_2 bezogene Parameterdarstellung der partiellen Differentialgleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Aus den drei Gleichungen (5') sind ja in der Tat a_1 und a_2 als eindeutige, stetige, mit stetigen Ableitungen versehene Funktionen der x, y, z, p, q bestimmt. Denn nach der im vorigen Paragraphen beendeten Herleitung des vollständigen Integrals wird a_2 die Zahl, welche S. 223 mit u_0 bezeichnet war. Somit wird

$$a_2 = u[y_0, x, y, \varphi(x_0, y, x, z)].$$

Freilich steckt hierin noch a_1. Und zwar hängt u stetig differenzierbar von a_1 ab. Aber nach S. 218 wissen wir schon, daß $a_1 = f_1(x, y, z, p, q)$.

Noch sei bemerkt, daß man das vollständige Integral auch nach dem zweiten in § 4 angegebenen, jede weitere Integration vermeidenden Weg aus drei in Involution liegenden Integralen $f = 0$, $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ gewinnen kann, wobei dann die Auflösungen nach a_1 und a_2 auf der Hand liegen.

Man wird erwarten, daß man aus diesem vollständigen Integral durch Eliminationsprozesse alle Integrale von (1) erhalten kann. Dieselben können in der Tat stets als Enveloppen einer passend gewählten einparametrigen im vollständigen Integral enthaltenen Schar von Integralflächen aufgefaßt werden. Um das einzusehen, gehen wir von einem Anfangsstreifen aus, der eine gewisse Integralfläche bestimmen möge. Durch ein jedes Element dieses Streifens geht genau eine Fläche aus dem vollständigen Integral. Nach S. 215 hat dieselbe mit der durch den Anfangsstreifen bestimmten Integralfläche den ganzen durch das Ausgangselement bestimmten charakteristischen Streifen gemeinsam, berührt letzteren also längs der Trägerkurve des Streifens. Den verschiedenen Elementen des Ausgangsstreifens entsprechend erhalten wir so eine einparametrige Schar von Flächen aus dem vollständigen Integral, welche die gewünschte Integralfläche einhüllt. Wenn $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$, $p = p(\tau)$, $q = q(\tau)$ der Ausgangsstreifen ist, so kann man nach den dargelegten Eigenschaften des vollständigen Integrales a_1 und a_2 als eindeutige Funktion aus

$$(5'') \qquad \begin{cases} z(\tau) = V\ (x(\tau), y(\tau), a_1, a_2), \\ p(\tau) = V_x(x(\tau), y(\tau), a_1, a_2), \\ q(\tau) = V_y(x(\tau), y(\tau), a_1, a_2) \end{cases}$$

berechnen. $a_1(\tau)$, $a_2(\tau)$ ergeben sich überdies als stetig differenzierbare Funktionen, falls $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$, $p(\tau)$, $q(\tau)$ stetige erste Ableitungen besitzen. Dies folgt sofort aus den vor wenigen Zeilen gegebenen Betrachtungen.

Somit stellt nun

$$z = V(x, y, a_1(\tau), a_2(\tau))$$

die gewünschte einparametrige Teilschar des vollständigen Integrales dar. Die Enveloppe bekommt man aus

$$(6) \qquad \begin{cases} z = V(x, y, a_1(\tau), a_2(\tau)), \\ 0 = V_a a_1'(\tau) + V_b \cdot a_2'(\tau) \end{cases}$$

durch Elimination von τ. Nach der Herleitung ist die Enveloppe eindeutig bestimmt.

Für festes τ stellen die beiden Gleichungen (6) eine charakteristische Kurve dar. Die Stellung der Flächenelemente längs derselben gewinnt man aus

$$(7) \qquad \begin{cases} p = V_x(x, y, a_1(\tau), a_2(\tau)), \\ q = V_y(x, y, a_1(\tau), a_2(\tau)). \end{cases}$$

So ist für jedes einzelne τ durch (6) und (7) ein charakteristischer Streifen bestimmt. Freilich steht die Wahl des Parameters t längs derselben noch dahin. Will man sie so treffen, wie das in den

charakteristischen Differentialgleichungen angenommen war, so muß man zu (6) und (7) noch eine jener Differentialgleichungen, z. B.

$$\frac{dx}{dt} = f_p$$

hinzufügen. Hat man aus (6) und (7) dann z. B. y, z, p, q als Funktionen von x bestimmt, so kann man aus dieser letzten Gleichung durch eine Quadratur den Zusammenhang zwischen x und t finden. Doch ist dieser Schritt ja nicht nötig, da im allgemeinen an einer bestimmten Wahl des Parameters t nichts gelegen sein wird.

Zusammenfassend haben wir somit über die Integration der charakteristischen Differentialgleichungen das folgende Ergebnis gewonnen:

Wenn man neben

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

ein weiteres Integral

$$f_1(x, y, z, p, q) = a_1$$

der charakteristischen Differentialgleichungen gefunden hat, so ist neben Eliminationsprozessen und einer Quadratur zur Bestimmung der Charakteristiken nur noch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zu leisten[1]*. Man bekommt alle charakteristischen Integralstreifen aus dem vollständigen Integral*

$$z = V(x, y, a_1, a_2),$$

wenn man die vorhin eingeführten

$$a_1(\tau),\ a_2(\tau),\ a_1'(\tau),\ a_2'(\tau)$$

als vier willkürliche Konstanten

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4$$

ansetzt und die Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= V(x, y, a_1, a_2), \\ 0 &= V_{a_1} \cdot a_3 + V_{a_2} \cdot a_4, \\ p &= V_x(x, y, a_1, a_2), \\ q &= V_y(x, y, a_1, a_2) \end{aligned}$$

nach x, y, z, p, q auflöst. Von den 4 willkürlichen Konstanten sind aber nur 3 wesentlich.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an, deren Zweck es ist, dem bisher benutzten Begriff des vollständigen Integrales eine etwas größere Allgemeinheit zu geben. Bis jetzt waren die vollständigen Integrale als zweiparametrige Scharen von Integralflächen erklärt, wie sie durch das Verfahren von § 4 und 5 erhältlich waren. Wenn uns aber nun eine zweiparametrige Schar von Integralflächen vorgelegt ist, die in einem gewissen Elementebereich alle nichtsingulären Elemente umfaßt, so stellen wir uns die Frage, inwieweit wir diese Schar zu den in diesem Paragraphen dargelegten Zwecken verwenden können.

[1]) Man denke an die *Mayer*sche Methode.

Dazu werde noch angenommen, daß sich aus den drei Gleichungen (5′) a_1 und a_2 als eindeutige stetig differenzierbare Funktionen von τ ergeben. Dann bleiben, wie man leicht sieht, alle weiteren Überlegungen richtig. Diese eindeutige Auflösbarkeit aber ist sicher gewährleistet, wenn die Funktionaldeterminante zweier der drei dort vorkommenden Funktionen V, V_x, V_y nach a_1, a_2 von Null verschieden ist.

Immer dann wollen wir also in Zukunft $z = V(x, y, a_1, a_2)$ ein vollständiges Integral nennen, wenn man die drei Gleichungen

$$z = V, \quad p = V_x, \quad q = V_y$$

eindeutig nach a_1, a_2 auflösen kann für alle $f(x, y, z, p, q) = 0$ genügenden x, y, z, p, q eines gewissen Bereiches der (x, y, z, p, q), d. h. wenn die Funktionaldeterminante von zwei der drei Gleichungen nach a_1, a_2 von Null verschieden ist für die (x, y, z, p, q) des Bereiches.

§ 7. Integration einiger spezieller Differentialgleichungen.

Es gibt verschiedene Sorten von partiellen Differentialgleichungen, für die man leicht ein vollständiges Integral finden kann.

Wenn z. B. die *Clairautsche Differentialgleichung*

$$z = x p + y q + f(p, q)$$

vorgelegt ist, so ist die zweiparametrige Ebenenschar

$$z = a_1 x + a_2 y + f(a_1, a_2)$$

ein vollständiges Integral. Denn tatsächlich umfassen diese Ebenen die sämtlichen Flächenelemente der partiellen Differentialgleichung. Die der *Clairaut*schen Gleichung genügenden Flächenelemente, deren Trägerpunkt ξ, η, ζ ist, liegen in Ebenen, welche sich aus den folgenden beiden Bedingungen ergeben:

$$\zeta = a_1 \xi + a_2 \eta + f(a_1, a_2),$$
$$z - \zeta = a_1 (x - \xi) + a_2 (y - \eta)$$

Sie besitzen also die Gleichungen

$$z = a_1 x + a_2 y + f(a_1, a_2).$$

Wenn weiter eine Differentialgleichung der Form

$$q = f(p, y)$$

vorgelegt ist, so hat man zur Bestimmung weiterer Integrale der charakteristischen Gleichungen die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot f_p - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}(p f_p - q) - \frac{\partial u}{\partial q} f_y = 0$$

zu betrachten. Ersichtlich ist

$$u = p$$

ein Integral derselben. Daher hat man zur Bestimmung eines vollständigen Integrales p und q aus

$$q = f(p, y),$$
$$p = a_1$$

auszurechnen. Also ist aus

$$p = a_1,$$
$$q = f(a_1, y)$$

das vollständige Integral zu ermitteln. Man findet

$$z = a_1 x + \int f(a_1, y)\, dy + a_2.$$

Als *drittes* Beispiel wähle ich eine Verallgemeinerung des vorigen

$$f(x, p) = g(y, q).$$

Man sagt hier, die *Variabeln seien getrennt.*

Ein Integral von

$$\frac{\partial u}{\partial x} f_p - \frac{\partial u}{\partial y} g_q + \frac{\partial u}{\partial z}(p f_p - q g_q) - \frac{\partial u}{\partial p} f_x + \frac{\partial u}{\partial q} g_y = 0$$

ist hier offenbar

$$u = f(x, p).$$

Zur Bestimmung des vollständigen Integrales hat man somit p und q aus

$$f(x, p) = a_1,$$
$$g(y, q) = a_1$$

zu ermitteln, ein Ergebnis, das man auch unmittelbar aus der partiellen Differentialgleichung entnehmen kann. Man möge etwa

$$p = \varphi(x, a_1),$$
$$q = \psi(y, a_1)$$

finden. Dann ist

$$z = \int \varphi(x, a_1)\, dx + \int \psi(y, a_1)\, dy + a_2$$

das vollständige Integral.

Sei *viertens*

$$f(z, p, q) = 0$$

vorgelegt, so hat man

$$\frac{\partial u}{\partial x} f_p + \frac{\partial u}{\partial y} f_q + \frac{\partial u}{\partial z}(p f_p + q f_q) - \frac{\partial u}{\partial p} p f_z - \frac{\partial u}{\partial q} q f_z = 0$$

zu betrachten. Ein Integral ist jedenfalls

$$u = \frac{q}{p}.$$

Die Auflösung der Gleichungen

$$q - a_1 p = 0,$$
$$f(z, p, q) = 0$$

möge

$$p = \varphi(a_1, z),$$
$$q = a_1 \varphi(a_1, z)$$

ergeben. Dann bekommt man das vollständige Integral in der Form

$$\int \frac{dz}{\varphi(a_1, z)} = x + a_1 y + a_2.$$

Bemerkung: Man kann übrigens die letzte Differentialgleichung auch auf den schon behandelten Typus

$$F(y, p, q) = 0$$

umformen, indem man x und z ihre Rollen vertauschen läßt. Soll nämlich durch

$$z = z(x, y)$$

x als abhängige, z als unabhängige Variable eingeführt werden, so hat man

$$1 = p \cdot \frac{\partial x}{\partial z},$$

$$0 = p \frac{\partial x}{\partial y} + q.$$

Also wird die Differentialgleichung

$$f\left(z, \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}\right) = 0,$$

ist also vom angegebenen Typus, der dadurch ausgezeichnet ist, das außer den partiellen Ableitungen nur eine der unabhängigen Variablen, die abhängige gar nicht vorkommt.

§ 8. Differentialgleichungen, in welchen die unbekannte Funktion nicht explizite vorkommt.

Es sollen Differentialgleichungen der Form

$$h(x, y, p, q) = 0$$

untersucht werden. Zunächst bemerkt man sofort, daß die fünf charakteristischen Gleichungen in zwei Gruppen zerfallen. Sie werden nämlich

$$\frac{dx}{dt} = h_p, \qquad \frac{dy}{dt} = h_q,$$

$$\frac{dp}{dt} = -h_x, \quad \frac{dq}{dt} = -h_y,$$

$$\frac{dz}{dt} = p h_p + q h_q.$$

Da aber z selbst in h nicht vorkommt, so kann man aus dieser letzten Gleichung z durch eine Quadratur bestimmen, sobald erst die vier anderen Funktionen aus den vier übrigen Gleichungen bestimmt sind.

Kennt man vollends irgendeine einparametrige Schar von Integralen

$$z = V(x, y, a)$$

der partiellen Differentialgleichung, und zwar so, daß in einem gewissen Bereich der xy eine der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ stetig und von Null verschieden ist, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial a} = c$$

ein Integral der charakteristischen Gleichungen.

Unter unseren Voraussetzungen ist nämlich

$$z = V(x, y, a) + b$$

nach S. 228 ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung. Denn man kann $z = V + b$, $p = V_x$, $q = V_y$ nach a, b auflösen.

Daher kann man den S. 227 aufgestellten Satz anwenden. Danach findet man die Charakteristiken aus

$$z = V(x, y, a) + b$$
$$\frac{\partial V}{\partial a} = c.$$

Hier also ergeben sich ihre x-y-Projektionen aus

$$\frac{\partial V}{\partial a} = c.$$

§ 9. Anwendungen in der Mechanik.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen sind von besonderer Wichtigkeit für die ebene Bewegung eines Massenpunktes, auf welchen eine zeitlich konstante Kraft wirkt, welche ein Potential $U(x, y)$ besitzt. Die Bewegungsgleichungen werden nämlich dann, wenn die Masse des Punktes Eins gesetzt wird,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Setzt man $\frac{dx}{dt} = p$ und $\frac{dy}{dt} = q$ und führt noch die kinetische Energie

$$T = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

ein, so hat man außerdem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q},$$

während man die beiden ersten Gleichungen so schreiben kann:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Führt man nun noch die Energie

$$E = T + U$$

ein, so hat man schließlich für die Bewegung diese vier Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_p, \\ \frac{dy}{dt} = E_q, \\ \frac{dp}{dt} = -E_x, \\ \frac{dq}{dt} = -E_y. \end{cases}$$

Das sind aber nach § 8 die vier zu

$$\frac{z_x^2 + z_y^2}{2} + U(x, y) = 2c \qquad (c = \text{konst.}) \tag{2}$$

gehörigen charakteristischen Gleichungen, so daß also die Integration der Bewegungsgleichungen gleichwertig ist mit der partiellen Differentialgleichung (2). Man nennt sie die *Hamiltonsche Gleichung* der Bewegung. (Ihr Bestehen bringt den Energiesatz zum Ausdruck.) Die Bahnkurven der Bewegung sind dann die x-y-Projektionen der Charakteristiken dieser Differentialgleichung. Zur Lösung des mechanischen Problems bedarf man also nur eines vollständigen Integrales dieser Gleichung. Zu seiner Auffindung ist oft die Einführung neuer unabhängiger Variabler zweckmäßig, weil man dadurch z. B. oft die Gleichung auf eine der in § 7 behandelten zurückführen kann.

Als Beispiel werde die Anziehung eines Massenpunktes nach zwei festen Zentren betrachtet. Die beiden Zentren sollen bei ± 1 auf der x-Achse liegen. Man führt elliptische Koordinaten ein. Dazu betrachtet man die Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} = 1 \qquad (a_1 > a_2 > 0 \text{ und } a_1 - a_2 = 1) \tag{3}$$

mit den Brennpunkten $x = \pm 1$, $y = 0$. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kegelschnitte der Schar hindurch, eine Ellipse und eine Hyperbel. Die Ellipse kommt heraus, wenn der Parameter λ der Ungleichung

$$a_2 + \lambda > 0$$

genügt. Hyperbeln erscheinen, wenn

$$-a_1 < \lambda < -a_2$$

ist. Ist aber x, y ein beliebiger Punkt der Ebene, so besitzt die Gleichung

$$x^2(a_2 + \lambda) + y^2(a_1 + \lambda) - (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda) = 0 \tag{4}$$

für λ stets zwei Wurzeln λ_1 und λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$, von welchen jeder der beiden Ungleichungen je eine genügt. Man erkennt das, wenn man nur die Vorzeichen des Ausdrucks für $\lambda = +\infty$, $-a_2$, $-a_1$ betrachtet. Setzt man also die beiden Gleichungen

$$x^2(a_2 + \lambda_1) + y^2(a_1 + \lambda_1) = (a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)$$
$$x^2(a_2 + \lambda_2) + y^2(a_1 + \lambda_2) = (a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)$$

an, so kann man daraus x^2 und y^2 durch λ_1 und λ_2 ausdrücken. Man findet

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)}{a_1 - a_2} = (a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2) \\ y^2 = \dfrac{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)}{a_2 - a_1} = -(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2). \end{cases} \tag{5}$$

Durch λ_1 und λ_2 ist also in jedem Quadranten genau ein Punkt festgelegt. Man nennt λ_1 und λ_2 seine elliptischen Koordinaten.

Wir müssen nun die Entfernungen des Punktes (x, y) von den beiden Zentren in elliptischen Koordinaten ausdrücken. Man hat

$$r^2 = (x-1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2x + 1$$
$$R^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2x + 1.$$

Nun rechnet man aber nach (5) leicht aus, daß

$$x^2 + y^2 = a_1 + a_2 + \lambda_1 + \lambda_2$$

ist. Daher findet man

$$r^2 = 2a_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)} = \left\{\sqrt{a_1+\lambda_1} - \sqrt{a_1+\lambda_2}\right\}^2$$
$$R^2 = 2a_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)} = \left\{\sqrt{a_1+\lambda_1} + \sqrt{a_1+\lambda_2}\right\}^2.$$

Also

$$r = \sqrt{a_1+\lambda_1} - \sqrt{a_1+\lambda_2}$$
$$R = \sqrt{a_1+\lambda_1} + \sqrt{a_1+\lambda_2}.$$

Daher wird nun das Potential

$$U = -\frac{m_1}{r} - \frac{m_2}{R} = -\frac{(m_1+m_2)\sqrt{a_1+\lambda_1} + (m_1-m_2)\sqrt{a_1+\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Für die partielle Differentialgleichung benötigen wir weiter den Ausdruck von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ durch $\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}$ und $\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}$. Man findet aber aus (5)

$$2x = (a_1+\lambda_2)\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + (a_1+\lambda_1)\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}$$
$$0 = (a_2+\lambda_2)\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + (a_2+\lambda_1)\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}$$
$$0 = (a_1+\lambda_2)\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + (a_1+\lambda_1)\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}$$
$$-2y = (a_2+\lambda_2)\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + (a_2+\lambda_1)\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}.$$

Also

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{2x(a_2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}, \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = -\frac{2x(a_2+\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}$$
$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = \frac{2y(a_1+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}, \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = -\frac{2y(a_1+\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Nun wird

$$z_x^2 + z_y^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 (\lambda_{1x}^2 + \lambda_{1y}^2) + 2\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}(\lambda_{1x}\lambda_{2x} + \lambda_{1y}\lambda_{2y}) + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}\right)^2 (\lambda_{2x}^2 + \lambda_{2y}^2).$$

Daraus findet man

$$\frac{z_x^2 + z_y^2}{4} = \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 \cdot \frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2} - \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}\right)^2 \cdot \frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Die *Hamilton*sche Gleichung wird also

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2 (a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1) - \frac{m_1+m_2}{2}\sqrt{a_1+\lambda_1} + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_2}\right)^2 (a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2) + \frac{(m_2-m_1)}{2}\sqrt{a_1+\lambda_2} = c(\lambda_1-\lambda_2).$$

Hier sind aber die *Variablen getrennt* und daher findet man nach S. 229 durch Einführung zweier neuen Integrationskonstanten a und b das vollständige Integral:

$$z = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{a + c\lambda_1 + \frac{m_1+m_2}{2}\sqrt{a_1+\lambda_1}}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{a - c\lambda_2 - \frac{m_2-m_1}{2}\sqrt{a_1-\lambda_2}}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}} + b.$$

Daher wird unter Benutzung der weiteren Integrationskonstanten β

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \beta$$

die Gleichung der Bahnkurven. Soll der Massenpunkt die Stelle $x_0 y_0$ mit gegebener Geschwindigkeit passieren, so ist die Bahnkurve eindeutig bestimmt. Denn aus der Energiegleichung

$$x'^2 + y'^2 - 2\left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{R}\right) = 4c$$

entnimmt man den Wert von c. Trägt man den in die Gleichung der Bahnkurve ein, so liefert die Bedingung, daß dieselbe mit gegebener Geschwindigkeit durch den Punkt $x_0 y_0$ gehen soll, die Bestimmung der Integrationskonstanten a und β.

Um nun auch noch den zeitlichen Ablauf der Bewegung zu erkennen, achten wir darauf, wie die Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2) von c abhängen. Wir fügen also dies c den unabhängigen Variablen zu und beachten, daß dann die Ableitung von z nach dieser neuen unabhängigen Variablen in (2) nicht vorkommt. Stellt man für die so aufgefaßte partielle Differentialgleichung (2) die charakteristischen Differentialgleichungen auf[1]), so sind die Gleichungen (1) noch durch die beiden folgenden zu ergänzen:

$$\frac{dc}{dt} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right) = 1.$$

Daraus entnimmt man also, daß

$$\frac{\partial z}{\partial c} = t + \tau$$

ist, und damit ist dann noch der zeitliche Ablauf der Bewegung geregelt. τ ist dabei eine neue Integrationskonstante, durch die der Nullpunkt der Zeitzählung bestimmt wird. Die Bahnkurven der Bewegung

[1]) Die hier im Vorbeigehen benutzte Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen wird S. 249 näher begründet werden.

lassen sich eingehend diskutieren. Man lese das z. B. bei *Charlier*: „Die Mechanik des Himmels" nach. Es ist ein Beispiel zu den S. 124 ff. behandelten Differentialgleichungen.

§ 10. Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen.

Am einfachsten sind die *Punkttransformationen*, die durch

$$(1) \qquad \begin{cases} X = X(x, y, z) \\ Y = Y(x, y, z) \\ Z = Z(x, y, z) \end{cases}$$

drei neue Variable X, Y, Z einführen. Dabei sollen diese drei Funktionen in einem gewissen Bereich der x, y, z eindeutig und stetig sein, sollen stetige erste Ableitungen und eine nichtverschwindende Funktionaldeterminante besitzen. Will man mit ihrer Hilfe eine partielle Differentialgleichung transformieren, so betrachte man eine Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ und deren Bildfläche. p, q mögen die partiellen Ableitungen sein, die sich aus

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_x + p\,\varphi_z = 0 \\ \varphi_y + q\,\varphi_z = 0 \end{cases}$$

ergeben. Analog sind P und Q erklärt. Für die Bildfläche findet man

$$\varphi_x\left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Z}\cdot P\right) + \varphi_y\left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Z}\cdot P\right) + \varphi_z\left(\frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial Z}\cdot P\right) = 0$$

oder, sobald $\varphi_z \neq 0$,

$$-p\left(\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial Z}\cdot P\right) - q\left(\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Z}\cdot P\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial Z}\cdot P\right) = 0$$

oder

$$P = \frac{p\frac{\partial x}{\partial X} + q\frac{\partial y}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial X}}{-p\frac{\partial x}{\partial Z} - q\frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial Z}}.$$

Ähnlich

$$Q = \frac{p\frac{\partial x}{\partial Y} + q\frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial z}{\partial Y}}{-p\frac{\partial x}{\partial Z} - q\frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial z}{\partial Z}}.$$

Diese beiden letzten Gleichungen zusammen mit (1) lehren, wie durch die Punkttransformation die Flächenelemente x, y, z, p, q in die Flächenelemente X, Y, Z, P, Q übergehen.

Es fragt sich, ob man zur Transformation der partiellen Differentialgleichungen nicht auch allgemeinere Transformationen der

Flächenelemente gebrauchen kann. Ganz beliebige Transformationen der x, y, z, p, q sind jedenfalls nicht brauchbar, denn aus den Elementen einer Fläche sollen doch wieder die Elemente einer Fläche werden. Jedenfalls muß also bei Einführung einer einparametrigen Schar von Elementen jedesmal, wenn

$$z' = p x' + q y'$$

ist, auch

$$Z' = P X' + Q Y'$$

sein und umgekehrt. Tatsächlich bestätigt man leicht, daß für unsere Punkttransformationen diese Bedingung erfüllt ist.

Sie ist gleichwertig damit, daß es einen von Null verschiedenen Faktor $\varrho(x, y, z, p, q)$ geben soll, so daß für die Transformationsformeln

$$(3) \qquad \begin{cases} X = X(x, y, z, p, q) \\ Y = Y(x, y, z, p, q) \\ Z = Z(x, y, z, p, q) \\ P = P(x, y, z, p, q) \\ Q = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

$$(4) \qquad Z' - P X' - Q Y' = \varrho (z' - p x' - q y')$$

gilt. Solche Transformationen sollen weiterhin *Berührungstransformationen* heißen. Wir setzen dabei wieder die fünf Funktionen (3) in einem gewissen Bereich der x, y, z, p, q[1]) und ihre ersten Ableitungen als stetig und von nichtverschwindender Funktionaldeterminante voraus.

Ein Beispiel einer solchen Berührungstransformation liefert der Übergang zu Ebenenkoordinaten. Dabei will man eine jede Fläche nicht als Ort ihrer Punkte, sondern als Ort ihrer Tangentialebenen auffassen. Zwischen den Ebenenkoordinaten X, Y, Z muß dann eine entsprechende Gleichung bestehen. Wir führen die Ebenenkoordinaten X, Y, Z durch die *Leitgleichung*

$$(5) \qquad Z + z = X x + Y y$$

ein. Soll eine Ebene mit den Koordinaten X, Y, Z im Punkte x, y, z eine Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ mit den Tangentialebenenstellungen p, q berühren, so muß

$$(6) \qquad X = p$$

$$(7) \qquad Y = q$$

sein. Aus (5), (6), (7) kann man im Verein mit $\varphi(x, y, z) = 0$ die Bedingung entnehmen, die zwischen den X, Y, Z bestehen muß.

---

[1]) Eventuell auch nur für die durch eine Gleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$ verbundenen x, y, z, p, q des Bereiches.

Daher bekommt man durch Differentiation die Stellungen P, Q der Tangentialebenen dieser Bildfläche:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial X} = x + X\frac{\partial x}{\partial X} + Y\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$= x + p\frac{\partial x}{\partial X} + q\frac{\partial y}{\partial X}.$$

Also wegen

$$\frac{\partial z}{\partial X} = p\frac{\partial x}{\partial X} + q\frac{\partial y}{\partial X}$$

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X} = x. \tag{8}$$

Ebenso

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial Y} = y. \tag{9}$$

(5), (6), (7), (8), (9) legen also die dem Übergang zu Ebenenkoordinaten entsprechende Transformation der Elemente fest. Sie ist eine Berührungstransformation, denn nach (5) wird

$$Z' + z' = X'x + Xx' + Y'y + Yy'$$

oder

$$Z' - X'P - Y'Q = -(z' - px' - qy').$$

Diese Berührungstransformation — Einführung von Ebenenkoordinaten — ist es, die für die partiellen Differentialgleichungen unter dem Namen *Legendresche Transformation* vielfache Verwendung gefunden hat.

Man kann leicht diese eben besprochene Berührungstransformation verallgemeinern, indem man statt einer linearen Leitgleichung von einer beliebigen Leitgleichung

$$\psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0 \tag{5'}$$

ausgeht. Die gleichen Überlegungen wie oben liefern zur Bestimmung der Transformation noch die vier folgenden Gleichungen

$$\psi_x + \psi_z \cdot p = 0 \tag{6'}$$

$$\psi_y + \psi_z \cdot q = 0 \tag{7'}$$

$$\psi_X + \psi_Z \cdot P = 0 \tag{8'}$$

$$\psi_Y + \psi_Z \cdot Q = 0. \tag{9'}$$

Auch hier bestätigt man leicht, daß eine Berührungstransformation vorliegt, wofern man natürlich noch voraussetzt, daß die Funktionaldeterminante der fünf Gleichungen (5') bis (9') nicht verschwindet und zwar sowohl hinsichtlich der x, y, z, p, q wie hinsichtlich der X, Y, Z, P, Q.

Man kann ausgehend von der Leitgleichung (5') und der Bedingung (4) auch auf einem mehr systematischen Weg zu den Transformationsformeln gelangen. Denkt man sich nämlich in (5') die Transformationsformeln eingetragen, so muß eine Identität in den $x, y, z,$

p, q herauskommen. Also muß nach Einführung einer einparametrigen Schar von Elementen bei Differentiation nach dem Parameter der Schar

$$\psi' = 0$$

sein. Jedesmal dann also, wenn $\psi' = 0$ ist, muß auch (4) gelten. Das führt zu dem Ansatz

$$(Z' - PX' - QY') - \varrho(z' - px' - qy') = \lambda\psi',$$

wo λ ein noch zu bestimmender Faktor ist. Ausführlicher geschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned}&(Z' - PX' - QY') - \varrho(z' - px' - qy')\\ &= \lambda(\psi_x x' + \psi_y y' + \psi_z z' + \psi_X X' + \psi_Y Y' + \psi_Z Z').\end{aligned}$$

Soll dies für beliebige x', y', z', X', Y', Z' richtig sein, so müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda\psi_Z & -\varrho &= \lambda\psi_z\\ P &= -\lambda\psi_X & +\varrho p &= \lambda\psi_x\\ Q &= -\lambda\psi_Y & +\varrho q &= \lambda\psi_y \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \psi_X + \psi_Z P &= 0 & \psi_x + \psi_z p &= 0\\ \psi_Y + \psi_Z Q &= 0 & \psi_y + \psi_z q &= 0. \end{aligned}$$

Das sind aber genau die früher gefundenen Beziehungen.

Die *Legendre*sche Transformation und ihre eben besprochene Verallgemeinerung ordnen der Leitgleichung (5′) zufolge jedem Punkte x_0, y_0, z_0 eine Fläche zu, deren Gleichung

$$\psi(x_0, y_0, z_0, X, Y, Z) = 0$$

ist. Durchläuft dann x_0, y_0, z_0 seinerseits eine Fläche, so erhält man eine zweiparametrige Flächenschar, deren Enveloppe sich offenbar aus (5′), (6′), (7′) bestimmen läßt. So wird auch geometrisch der Charakter der Berührungstransformation deutlich. Des weiteren aber läßt diese Beobachtung erkennen, daß es eine Illusion wäre, zu glauben, daß nun auch wirklich jede Fläche x, y, z in eine Fläche der X, Y, Z überginge. Vielmehr können da Ausartungen vorkommen. Das erkennt man deutlich, sobald man sich etwa fragt, was durch die *Legendre*sche Transformation aus einer Ebene der x, y, z entsteht. Längs einer Ebene z. B. sind p und q und damit nach (6), (7) X und Y konstant. Sei etwa

$$z = ax + by + c$$

die zu transformierende Ebene, so wird

$$\begin{aligned} X &= a\\ Y &= b, \end{aligned}$$

ferner nach (5)

$$Z = -c.$$

Dagegen

$$P = x$$
$$Q = y.$$

Also erhält man als Bild der Ebene die Gesamtheit aller Flächenelemente mit dem gemeinsamen Trägerpunkt

$$(X, Y, Z) = (a, b, -c).$$

Jedenfalls kommt also keine echte Fläche heraus, sondern ein Spezialfall dessen, was *Lie* einen *Elementeverein* nannte. Unter einem Elementeverein versteht nämlich *Lie* eine Schar von Flächenelementen, die der Relation

$$z' = px' + qy'$$

genügen. Berührungstransformationen sind also dadurch charakterisiert, daß sie jeden Elementeverein in einen Elementeverein überführen. Ein Beispiel eines Elementevereins hatten wir in dem eben schon besprochenen Bündel, in dem die Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ konstante Werte haben, also $x' = y' = z' = 0$ gilt. Ein weiteres Beispiel bildet die Gesamtheit aller Ebenen durch die Tangenten einer Kurve

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

denn die Bedingung dafür, daß eine Ebene durch diesen Kurvenpunkt

$$z - z(t) = p(x - x(t)) + q(y - y(t))$$

die Kurventangente

$$x = x(t) + x'(t)\tau$$
$$y = y(t) + y'(t)\tau$$
$$z = z(t) + z'(t)\tau$$

durch diesen Punkt enthält, lautet doch gerade

$$z' = px' + qy'.$$

In einen solchen „kurvenartigen" Elementeverein wird durch die *Legendre*sche Transformation z. B. jede abwickelbare Fläche übergeführt. Denn längs der geradlinigen Erzeugenden einer solchen Fläche ändert sich die Stellung der Tangentialebene nicht. Den Flächenelementen einer geradlinigen Erzeugenden entspricht daher ein Büschel von Flächenelementen, und das Bild der Fläche wird eine einparametrige Schar solcher Büschel. Die Trägergeraden der Büschel berühren die Kurve der Trägerpunkte in denselben.

Es möge eine Aufgabe für den Leser sein, diese Betrachtung rechnerisch noch zu vervollständigen.

Weitere Beispiele von Berührungstransformationen erhält man, wenn man von einem Paar von Leitgleichungen

$$\begin{cases} \psi_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0 \\ \psi_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

ausgeht. Diese beiden Gleichungen sollen nach Eintragung der Transformationsformeln zu Identitäten werden. Für eine einparametrige Schar von Elementen wird dann

$$\psi_1' = 0$$
$$\psi_2' = 0$$

und diese beiden Gleichungen sollen die Identität (4) nach sich ziehen. Das führt zu dem Ansatz

$$Z' - PX' - QY' - \varrho(z' - px' - qy') = \lambda_1 \psi_1' + \lambda_2 \psi_2'$$

mit zwei noch zu bestimmenden Faktoren λ_1 und λ_2. Da diese Gleichung wieder für beliebige x', y', z', X', Y', Z' gelten soll, so führt der oben schon verwendete Elementenvergleich zu

$$(11') \qquad \begin{cases} 1 = \lambda_1 \psi_{1Z} + \lambda_2 \psi_{2Z} \\ P = -\lambda_1 \psi_{1X} - \lambda_2 \psi_{2X} \\ Q = -\lambda_1 \psi_{1Y} - \lambda_2 \psi_{2Y} \end{cases}$$

$$(11'') \qquad \begin{cases} -\varrho = \lambda_1 \psi_{1z} + \lambda_2 \psi_{2z} \\ \varrho p = \lambda_1 \psi_{1x} + \lambda_2 \psi_{2x} \\ \varrho q = \lambda_1 \psi_{1y} + \lambda_2 \psi_{2y}. \end{cases}$$

Diese sechs Gleichungen zusammen mit den beiden Gleichungen (10) ergeben acht Gleichungen zum Bestimmen der acht Funktionen $X, Y, Z, P, Q, \varrho, \lambda_1, \lambda_2$. Aus (11') folgt leicht

$$(\psi_{1X} + \psi_{1Z} P)\lambda_1 + (\psi_{2X} + \psi_{2Z} P)\lambda_2 = 0$$
$$(\psi_{1Y} + \psi_{1Z} Q)\lambda_1 + (\psi_{2Y} + \psi_{2Z} Q)\lambda_2 = 0.$$

Also muß — wenn nicht $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sein soll

$$(12') \qquad \begin{vmatrix} \psi_{1X} + \psi_{1Z} P & \psi_{2X} + \psi_{2Z} P \\ \psi_{1Y} + \psi_{1Z} Q & \psi_{2Y} + \psi_{2Z} Q \end{vmatrix} = 0$$

sein, ebenso kommt aus (11'')

$$(12'') \qquad \begin{vmatrix} \psi_{1x} + \psi_{1z} p & \psi_{2x} + \psi_{2z} p \\ \psi_{1y} + \psi_{1z} q & \psi_{2y} + \psi_{2z} q \end{vmatrix} = 0.$$

Aus (10) und (12'') kann man dann im allgemeinen X, Y, Z bestimmen. Dann liefern (11'') $\varrho, \lambda_1, \lambda_2$ bis auf einen gemeinsamen Faktor. Dann normiert die erste Gleichung (11') diesen Faktor und die beiden anderen liefern P und Q.

Auch der geometrische Sinn solcher Transformationen ist leicht zu erkennen. Die beiden Gleichungen (10) ordnen jedem Punkt x_0, y_0, z_0 eine Kurve des X, Y, Z-Raumes zu und umgekehrt. Die drei Gleichungen (10) und (12''), aus denen ja die dem Element X, Y, Z, P, Q entsprechenden x, y, z zu bestimmen sind, bedeuten geometrisch, daß x, y, z so zu wählen sind, daß die durch (10) dar-

gestellte Kurve der X, Y, Z das Element X, Y, Z, P, Q berührt. Daher entspricht den Elementen der Fläche x, y, z eine zweiparametrige Schar von Kurven, eine sogenannte Kongruenz von Kurven. Die Fläche selbst geht in die von den Kurven der Kongruenz berührte Fläche, also in die sogenannte Brennfläche der Kongruenz über.

Als naheliegendes Beispiel bietet sich der Fall dar, daß die Gleichungen ψ_1 und ψ_2 in beiden Variablenreihen linear sind. Z. B. seien

$$Y - y = 0$$
$$Z - z + Xx = 0$$

die beiden Leitgleichungen. Dann wird (12″)

$$-X + p = 0.$$

Danach liefern die Gleichungen (11″)

$$+\varrho = +\lambda_2$$
$$+\varrho q = -\lambda_1.$$

Ferner folgt aus (11′)

$$1 = \lambda_2,$$

also

$$\varrho = 1$$
$$\lambda_1 = -q.$$

Also

$$P = -x$$
$$Q = q.$$

Also haben wir im ganzen

$$X = p$$
$$Y = y$$
$$Z = z - px$$
$$P = -x$$
$$Q = q.$$

Diese Transformation wird unter dem Namen *Eulersche Transformation* viel verwendet.

Wählt man endlich drei Leitgleichungen, so kommt man zu den zuerst besprochenen Punkttransformationen zurück.

Nach den vorstehenden Erörterungen *hat man unter einer Berührungstransformation eine Transformation* (3) *mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante zu verstehen, für die außerdem eine Identität* (4) *mit nicht identisch in* x, y, z, p, q *verschwindendem* ϱ *gilt.*

Wir wollen uns nun zunächst davon überzeugen, daß von diesen beiden Bedingungen die erste — auf die Funktionaldeterminante bezügliche — wegfallen darf. Diese kann nämlich nur da verschwinden, wo ϱ verschwindet. Sie ist nämlich bis auf das Vorzeichen die dritte Potenz von ϱ.

Der Beweis dieser Behauptung sowie viele Anwendungen der Berührungstransformationen stützen sich wesentlich auf die sogenannte *bilineare Invariante*. Wir nehmen zwei Elementevereine: $x(t), \ldots, q(t)$ mit

$$z' = p x' + q y' \tag{13'}$$

und $x(\tau), \ldots, q(\tau)$ mit

$$\dot{z} = p \dot{x} + q \dot{y}. \tag{13''}$$

Dabei sollen also Striche Ableitungen nach dem Parameter t des ersten Vereins, Punkte Ableitungen nach dem Parameter τ des zweiten Vereins bedeuten. $u(x, y, z, p, q)$ sei eine auf beiden Vereinen stetig differenzierbar erklärte Funktion. Ebenso sollen $x(t)$, $x(\tau)$ ... stetig differenzierbare Funktionen sein in gewissen Intervallen

$$a \leqq t \leqq b, \qquad \alpha \leqq \tau \leqq \beta.$$

Dann haben wir

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z' + \frac{\partial u}{\partial p} p' + \frac{\partial u}{\partial q} q'. \tag{13'''}$$

Setzt man abkürzend

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d u}{d x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + p \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{d u}{d y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + q \dfrac{\partial u}{\partial z}, \end{array} \right. \tag{13^{IV}}$$

so kann man nach (13') für (13''') schreiben

$$u' = \frac{d u}{d x} x' + \frac{d u}{d y} y' + \frac{\partial u}{\partial p} p' + \frac{\partial u}{\partial q} q'. \tag{14'}$$

Analog hat man

$$\dot{u} = \frac{d u}{d x} \dot{x} + \frac{d u}{d y} \dot{y} + \frac{\partial u}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial u}{\partial q} \dot{q}. \tag{14''}$$

Diese Beziehungen wollen wir insbesondere auf X, Y, Z, P, Q anwenden. Nun aber hat man zwischen den Funktionen (3) mit einem $\varrho \neq 0$ die Beziehungen

$$Z' - P X' - Q Y' = \varrho (z' - p x' - q y') \tag{15'}$$

und

$$\dot{Z} - P \dot{X} - Q \dot{Y} = \varrho (\dot{z} - p \dot{x} - q \dot{y}). \tag{15''}$$

Daher findet man aus (15') durch Differentiation nach τ

$$\begin{aligned} \dot{Z}' - \dot{P} X' - P \dot{X}' - \dot{Q} Y' - Q \dot{Y}' = {} & \dot{\varrho} (z' - p x' - q y') \\ & + \varrho (\dot{z}' - \dot{p} x' - p \dot{x}' - \dot{q} y' - q \dot{y}') \end{aligned}$$

und ebenso aus (15'') durch Differentiation nach t

$$\begin{aligned} \dot{Z}' - P' \dot{X} - P \dot{X}' - Q' \dot{Y} - Q \dot{Y}' = {} & \varrho' (\dot{z} - p \dot{x} - q \dot{y}) \\ & + \varrho (\dot{z}' - p' \dot{x} - p \dot{x}' - q' \dot{y} - q \dot{y}'). \end{aligned}$$

Beachtet man noch (13') und (13'') und zieht beide Gleichungen voneinander ab, so kommt

$$P' \dot{X} - \dot{P} X' + Q' \dot{Y} - \dot{Q} Y' = \varrho (p' x - p x' + q' y - \dot{q} y'). \tag{16}$$

$p'\dot{x} - \dot{p}x' + q'\dot{y} - \dot{q}y'$ ist die gesuchte bilineare Invariante, deren Bedeutung für die Anwendung der Berührungstransformationen auf partielle Differentialgleichungen sich bald zeigen wird. Zunächst wenden wir sie an, um die schon erwähnte Beziehung zwischen ϱ und der Funktionaldeterminante zu finden. Ersetzen wir in (16) $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{P}, \dot{Q}$ durch ihre aus (14″) für $u = X, Y, P, Q$ folgenden Werte und beachten, daß (16) für beliebige $\dot{x}, \dot{y}, \dot{p}, \dot{q}$ gelten muß, so folgt durch Vergleichen der beiden Seiten

$$(17)\qquad \begin{cases} \varrho x' = \dfrac{\partial P}{\partial p}X' + \dfrac{\partial Q}{\partial p}Y' - \dfrac{\partial X}{\partial p}P' - \dfrac{\partial Y}{\partial p}Q' \\ \varrho y' = \dfrac{\partial P}{\partial q}X' + \dfrac{\partial Q}{\partial q}Y' - \dfrac{\partial X}{\partial q}P' - \dfrac{\partial Y}{\partial q}Q' \\ -\varrho p' = \dfrac{dP}{dx}X' + \dfrac{dQ}{dx}Y' - \dfrac{dX}{dx}P' - \dfrac{dY}{dx}Q' \\ -\varrho q' = \dfrac{dP}{dy}X' + \dfrac{dQ}{dy}Y' - \dfrac{dX}{dy}P' - \dfrac{dY}{dy}Q'. \end{cases}$$

Daneben stellen wir die vier sich aus (14′) für $u = X, Y, P, Q$ ergebenden analogen Beziehungen. Trägt man sie in (17) ein, so kommen Identitäten zum Vorschein. Koeffizientenvergleich der x', y', p', q' auf beiden Seiten bringt zum Ausdruck, daß das Produkt der folgenden beiden Determinanten δ und Δ den Wert ϱ^4 hat:

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial X}{\partial q} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dQ}{dx} & \frac{dX}{dx} & \frac{dY}{dx} \\ \frac{dP}{dy} & \frac{dQ}{dy} & \frac{dX}{dy} & \frac{dY}{dy} \end{vmatrix}$$

Da man aber die hier vorkommenden Determinanten durch Vertauschen von Zeilen und Kolonnen ineinander überführen kann, so folgt

$$\Delta = \delta.$$

Also

$$\delta^2 = \varrho^4$$

oder

$$\delta = \pm \varrho^2 .$$

Wenden wir das nun auf die zu untersuchende Funktionaldeterminante der Berührungstransformation (3) an. Sie ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial p} & \frac{\partial Z}{\partial q} \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix}$$

oder nach (13‴)

$$\begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial p} & \frac{\partial Z}{\partial q} \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} & \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix}$$

Trägt man aber in (15′) die sich aus (13‴) für $u = X, Y, Z, P, Q$ ergebenden Werte ein, so erhält man

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z} &= \varrho \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - P\frac{\partial X}{\partial x} - Q\frac{\partial Y}{\partial x} &= -\varrho p \\ \frac{\partial Z}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial y} - Q\frac{\partial Y}{\partial y} &= -\varrho q \\ \frac{\partial Z}{\partial p} - P\frac{\partial X}{\partial p} - Q\frac{\partial Y}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial q} - P\frac{\partial X}{\partial q} - Q\frac{\partial Y}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

Aus den drei ersten Gleichungen folgt wegen (13ᴵⱽ) noch

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \frac{dZ}{dx} &= P\frac{dX}{dx} + Q\frac{dY}{dx} \\ \frac{dZ}{dy} &= P\frac{dX}{dy} + Q\frac{dY}{dy} . \end{aligned}$$

Daher kann man die Funktionaldeterminante auch so schreiben (wenn man die erste Zeile mit P, die zweite mit Q multipliziert und beide von der dritten abzieht):

$$\begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\ 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} & \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = \varrho\,\delta = \pm\,\varrho^3.$$

Also ist die Funktionaldeterminante $= \pm\,\varrho^3$ *und kann nur verschwinden, wenn* ϱ *verschwindet.*

Nachdem nunmehr unsere allgemeinen Betrachtungen über Berührungstransformationen zu einem vorläufigen Abschluß gediehen sind, ist es Zeit, nützliche Anwendungen auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu machen. Durch die Berührungstransformation wird nämlich eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in eine andere partielle Differentialgleichung erster Ordnung übergeführt. Denn zunächst möge durch die Substitution (3) aus der Relation

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

die Relation

$$F(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

werden. Da nun aber aus jedem Elementeverein durch Berührungstransformation ein Elementeverein wird, so geht insbesondere jeder Integralverein der ersten in einen Integralverein der zweiten über [1]). Da aber nicht jede Fläche in eine Fläche übergeht, so kann man nicht behaupten, daß die Integralflächen der beiden einander entsprechen. Vielmehr gilt, wie eben bewiesen, eine solche Angabe nur für den allgemeineren Begriff des Integralvereins. Dies muß man also bei Anwendung der Berührungstransformationen auf Differentialgleichungen stets im Auge behalten.

Die bilineare Invariante läßt weiter erkennen, daß aus den charakteristischen Streifen der einen Differentialgleichung die charakteristischen Streifen der anderen werden. Das soll heißen: aus den charakteristischen Differentialgleichungen der einen und ihren Lösungen werden die charakteristischen Differentialgleichungen der transformierten Dif-

[1]) Ein Integralverein ist ein Elementeverein, dessen Elemente alle der partiellen Differentialgleichung genügen.

ferentialgleichung und deren Lösungen. Um das einzusehen, tragen wir in die Bilinearinvariante als Streifen

$$z' = p x' + q y'$$

einen charakteristischen ein. Dann hat man aus den charakteristischen Differentialgleichungen

$$x' = \frac{\partial f}{\partial p} \qquad p' = -\frac{df}{dx}$$

$$y' = \frac{\partial f}{\partial q} \qquad q' = -\frac{df}{dy}.$$

Also wird

$$P'\dot{X} - \dot{P}X' + Q'\dot{Y} - \dot{Q}Y' = \varrho\left(-\frac{df}{dx}\dot{x} - \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} - \frac{df}{dy}\dot{y} - \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}\right)$$
$$= -\varrho\dot{f}$$

Wegen $f(x, y, z, p, q) = F(X, Y, Z, P, Q)$ ist dies aber gleich $-\varrho\dot{F}$. Also hat man

$$P'\dot{X} - \dot{P}X' + Q'\dot{Y} - \dot{Q}Y'$$
$$= -\varrho\left(\frac{dF}{dX}\dot{X} + \frac{\partial F}{\partial P}\dot{P} + \frac{dF}{dY}\dot{Y} + \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q}\right).$$

Da dies aber für beliebige $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{P}, \dot{Q}$ gelten muß, so folgt

$$X' = \varrho\frac{\partial F}{\partial P}$$

$$Y' = \varrho\frac{\partial F}{\partial Q}$$

$$P' = -\varrho\frac{dF}{dX}$$

$$Q' = -\varrho\frac{dF}{dY}.$$

Ferner aber hat man wegen (3) und $z' = p x' + q y'$

$$Z' = PX' + QY' = +\varrho\left(P\frac{\partial F}{\partial P} + Q\frac{\partial F}{\partial Q}\right).$$

Bis auf den Faktor ϱ hat man also die charakteristischen Differentialgleichungen von $F = 0$. Den Faktor ϱ aber kann man ruhig streichen, da ja der Parameter t durch einen entsprechenden anderen ersetzt werden kann.

Ein Beispiel einer Berührungstransformation ist uns schon auf S. 214 begegnet. Dort integrierten wir die charakteristischen Differentialgleichungen und fanden, daß durch jedes Element x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 genau ein Streifen

$$x = x(t - t_0, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$
$$y = y(\ldots\ldots\ldots)$$
$$z = z(\ldots\ldots\ldots)$$
$$p = p(\ldots\ldots\ldots)$$
$$q = q(\ldots\ldots\ldots)$$

geht. Wählt man insbesondere die x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 auf einem Anfangsstreifen, so liegen auch die x, y, z, p, q für alle t auf einem Streifen. Wir fanden insbesondere

$$\frac{dz}{d\tau} - p\frac{dx}{d\tau} - q\frac{dy}{d\tau} = e^{-\int_{t_0}^{t} f_z\, dt} \cdot \left(\frac{dz_0}{d\tau} - p_0\frac{dx_0}{d\tau} - q_0\frac{dy_0}{d\tau}\right).$$

Daher ist insbesondere jetzt die Funktionaldeterminante der x, y, z, p, q nach den x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 von Null verschieden; denn

$$e^{-\int_{t_0}^{t} f_z\, dt}$$

verschwindet nicht und ist endlich, solange f_z endlich ist.

Mit Hilfe unserer Sätze über Berührungstransformationen können wir nun auch in eleganter Weise die Ergebnisse wieder gewinnen, die wir S. 227 über die Integration der charakteristischen Gleichungen mit Hilfe eines vollständigen Integrales der zugehörigen partiellen Differentialgleichung gewonnen haben. Es sei also

(18′) $$z = V(x, y, P, Q)$$

ein vollständiges Integral der Differentialgleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Dann können nach S. 228 P und Q durch Auflösung aus (18′) und

(18″) $$\begin{cases} p = \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ q = \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

als Funktionen von x und y gewonnen werden. Es genügt aber hier, P und Q nur aus (18″) als Funktionen von x, y, z zu gewinnen. Als neue Variable X, Y führen wir nun noch

(19) $$\begin{cases} X = \dfrac{\partial V}{\partial P} \\ Y = \dfrac{\partial V}{\partial Q} \end{cases}$$

ein. Dann gilt jedenfalls

$$V' = p\,x' + q\,y' + X\,P' + Y\,Q'$$

also

$$V' - (X\,P)' - (Y\,Q)' = p\,x' + q\,y' - P\,X' - Q\,Y'.$$

Ich setze

(20) $$Z = z - V + X\,P + Y\,Q.$$

Mithin

$$Z' - P\,X' - Q\,Y' = z' - V' + X\,P' + Y\,Q' = z' - p\,x' - q\,y'.$$

Also bestimmen die Gleichungen (18″), (19), (20) eine Berührungstransformation. Man bekommt die transformierte partielle Differentialgleichung, indem man x und y aus (18′), (19) und (20) eliminiert.

Also wird

$$F(X, Y, Z, P, Q) \equiv Z - XP - YQ = 0.$$

Die transformierte Differentialgleichung ist also eine *Clairaut*sche Differentialgleichung und man erkennt somit gleichzeitig, daß man durch Berührungstransformationen jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung in diese *Clairaut*sche und damit natürlich auch in jede andere partielle Differentialgleichung erster Ordnung überführen kann. Die charakteristischen Differentialgleichungen der transformierten partiellen werden nun aber

$$\begin{aligned} X' &= -X \\ Y' &= -Y \\ Z' &= -Z \\ P' &= P - P = 0. \\ Q' &= Q - Q = 0. \end{aligned}$$

Also werden die charakteristischen Streifen

$$\begin{aligned} Y + mX &= 0 \\ Z + nX &= 0 \\ P &= a \\ Q &= b, \end{aligned}$$

wo a, b, m, n willkürliche Konstanten sind. Sollen das insbesondere Integralstreifen sein, so muß noch

$$Z - PX - QY = 0$$

sein. Das liefert

$$-nX - aX + bmX = 0.$$

Also $n = -a + bm$. Die Integralstreifen sind daher

$$\begin{aligned} Y + mX &= 0 \\ Z - aX - bY &= 0 \\ P &= a \\ Q &= b. \end{aligned}$$

Also werden die Lösungen der zu $f = 0$ gehörigen charakteristischen Differentialgleichungen bestimmt durch

$$\frac{\partial V}{\partial Q} + m\frac{\partial V}{\partial P} = 0$$

$$z - V(x, y, P, Q) + X(P - a) + Y(Q - b) = 0$$

$$P = a, \quad Q = b.$$

In V ist also überall a, b statt P, Q zu schreiben. Die charakteristischen Integralstreifen werden insbesondere

$$\frac{\partial V}{\partial b} + m\frac{\partial V}{\partial a} = 0$$

$$z - V(x, y, a, b) = 0, \qquad p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial V}{\partial y}$$

und dies ist das Ergebnis, das wir von S. 227 her kennen.

§ 11. Verallgemeinerung auf den Fall von n unabhängigen Veränderlichen.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien n unabhängige Veränderliche, z sei die gesuchte Funktion derselben. Zur Abkürzung werde

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt. Dann sei die Differentialgleichung

$$f(x_1 \ldots x_n; z; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \quad \text{oder kurz} \quad f(x, z, p) = 0$$

vorgelegt. Ihre linke Seite soll für ein gewisses Gebiet der $2n + 1$ Variablen x, z, p samt ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen eine stetige Funktion sein.

Die Vermutung liegt nahe, daß jetzt die folgenden Differentialgleichungen die Rolle der charakteristischen übernehmen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_k}{dt} = f_{p_k}; \quad \dfrac{dp_k}{dt} = -f_{x_k} - p_k f_z \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \dfrac{dz}{dt} = p_1 f_{p_1} + \ldots + p_n f_{p_n}. \end{array}\right.$$

Als Aufgabe werde gestellt, durch eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit R_{n-1} des $n+1$-dimensionalen R_{n+1} der (x, z) eine n-dimensionale Integralfläche zu legen. Diese R_{n-1} sei durch

$$\left.\begin{array}{l} x_k = \varphi_k(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}) \\ z = \varphi(\tau_1 \ldots \tau_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

gegeben. Dabei seien die φ in einem gewissen Bereich der τ stetig differenzierbar. Zunächst müssen wir noch voraussetzen, daß sich durch diese R_{n-1} ein Anfangsintegralstreifen legen lasse. Ein Streifen ist hier an die Bedingung

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \ldots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \tau}$$

gebunden. Den $n-1$ Parametern τ_k entsprechend müssen also für einen Integralstreifen durch die R_{n-1} die folgenden Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial z}{\partial \tau_k} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \tau_k} + \ldots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \tau_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$f(x, z, p) = 0.$$

Nehmen wir an für $\tau_k = \tau_k^{(0)}$, d. h. $x_k = x_k^{(0)}$, $z = z^0$ gebe es eine Lösung $p_k = p_k^{(0)}$ dieser Gleichungen und die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} f_{p_1} \cdots & f_{p_n} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \tau_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \tau_{n-1}} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix}$$

sei an dieser Stelle von Null verschieden[1]). Dann gibt es nach bekannten Sätzen eine Umgebung jener Stelle $(x^{(0)}, z^0)$ der R_{n-1}, für die die Gleichungen lösbar sind. Die Lösungen hängen stetig und differenzierbar von den Parametern ab. Damit ist ein Anfangsstreifen bestimmt.

Ein Element eines solchen Anfangsstreifens ist durch $2n+1$ Anfangswerte x_0, z_0, p_0 charakterisiert. Wir legen durch dasselbe einen charakteristischen Streifen, indem wir diejenige Lösung der charakteristischen Differentialgleichungen bestimmen, welche für $t=0$ in x_0, z_0, p_0 übergehen. Ein solcher charakteristischer Streifen ist ein Integralstreifen, weil sein zu $t=0$ gehöriges Anfangselement der partiellen Differentialgleichung $f(x_0, z_0, p_0)=0$ genügt. Trägt man nämlich in $f(x,z,p)$ die $2n+1$ den Streifen bestimmenden Funktionen $x=x(t)$, $z=z(t)$, $p=p(t)$ ein und differenziert nach t, so kommt

$$\Sigma f_{x_k}\cdot\frac{dx_k}{dt}+f_z\frac{dz}{dt}+\Sigma f_{p_k}\frac{dp_k}{dt}$$
$$=\Sigma f_{x_k}f_{p_k}+f_z\Sigma p_k f_{p_k}-\Sigma f_{p_k}(f_{x_k}+f_z p_k)=0\,.$$

Daher ändert sich $f(x,z,p)$ mit t nicht. Da aber für $t=0$ das verschwindende $f(x_0,z_0,p_0)$ herauskommt, so ist $f(x,z,p)=0$ für alle t, d. h. die in der angegebenen Weise bestimmten charakteristischen Streifen sind lauter Integralstreifen.

Die den charakteristischen Streifen angehörigen Elemente (x,z,p) sind somit lauter Integralelemente. Erfüllen sie aber auch eine Integralfläche?

Nach den Existenz- und Stetigkeitssätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen hängen die charakteristischen Streifen für einen gewissen Bereich der Parameter (τ,t) stetig und stetig differenzierbar von den Parametern ab:

$$\left.\begin{aligned} x_k&=\varphi_k(\tau,t)\\ z&=\varphi(\tau,t)\\ p_k&=\psi_k(\tau,t)\end{aligned}\right\}\qquad(k=1,\ldots,n).$$

Für jede einparametrige Schar derselben ist die Streifenbedingung erfüllt. Für die Schar, die durch Konstanthalten aller τ charakterisiert ist, sahen wir das eben schon. Für die Schar, welche durch Konstanthalten von irgend $n-1$ anderen der n-Parameter τ, t erhalten wird, ist es noch zu zeigen. Wir haben also zu zeigen, daß z. B.

$$\frac{\partial z}{\partial\tau_k}=\Sigma p_i\frac{\partial x_i}{\partial\tau_k}$$

gilt. Für $t=0$ ist das richtig. Um es allgemein zu bestätigen,

[1]) Dies ist z. B. stets dann der Fall, wenn die R_{n-1} diese ist:
$$x_1=\text{konst.},\ z=\varphi(x_2,\ldots,x_n)$$
und die Differentialgleichung die Form $p_1=g(x_1,\ldots,x_n,z,p_2,\ldots,p_n)$ hat.

differenziert man nach t ganz wie auf S. 214 und beachtet die charakteristischen Differentialgleichungen. Der Leser möge die kleine Rechnung selbst zu Ende führen.

Damit ist noch immer nicht erkannt, daß die gefundene n-parametrige Schar von Integralelementen eine R_n erfüllen. Denn wenn z. B. die charakteristischen Streifen alle in den Anfangsstreifen hineinfielen, so würden wir eben nichts anderes als diese R_{n-1} selbst erhalten. Dies Hineinfallen ist nun aber durch unsere Voraussetzungen ausgeschlossen. Denn wäre ein charakteristischer Streifen, z. B. der durch $\tau_k = \bar{\tau}_k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ charakterisierte auf der R_{n-1} gelegen, so müßte es gewisse Funktionen $\tau_k = \tau_k(t)$ geben, so daß identisch in t

$$f_{p_k} = \frac{dx_k}{dt} = \Sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau_i} \frac{\partial \tau_i}{dt}$$

wäre. Dann müßte aber die oben S. 249 als von Null verschieden angenommene Determinante verschwinden. Gerade ihr Nichtverschwinden gibt die Gewähr, daß wir eine Integralfläche gefunden haben.

Den Nachweis, daß die gefundene Integralfläche die einzige durch die gegebene R_{n-1} ist, wird der Leser ganz wie auf S. 215 führen können. Man muß dazu nur nachweisen, daß zwei Integralflächen, welche ein Flächenelement gemeinsam haben, auch den ganzen durch dies Element bestimmten charakteristischen Streifen gemeinsam haben.

Diese Bemerkung ist es denn auch, die es erlaubt, die oben für den Fall zweier unabhängiger Variabler entwickelte Theorie der *vollständigen Integrale* auf diesen allgemeineren Fall zu übertragen.

Ich möchte dazu den zweiten, sich der Berührungstransformationen bedienenden Weg einschlagen. Die Theorie dieser Transformationen läßt sich ohne alles Weitere auf den jetzt vorliegenden Fall von n unabhängigen Veränderlichen übertragen. Der Leser möge sich das selbst im einzelnen durchüberlegen. Wir wollen also nun zusehen, wie man aus einem vollständigen Integral die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen gewinnen kann. Wie man ein vollständiges Integral konstruieren kann, wollen wir uns dann zum Schluß überlegen.

(21) $$Z = V(x_1, \ldots, x_n, P_1, \ldots, P_n)$$

sei ein vollständiges Integral von

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 .$$

Es soll also möglich sein, die Gleichungen (21) und

(22) $$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

für die $f = 0$ genügenden x, z, p aus einem gewissen Bereich nach den P aufzulösen. Für n der $n+1$ Gleichungen (21), (22) sei die zu-

gehörige Funktionaldeterminante von Null verschieden. Die Ableitungen der beiden ersten Ordnungen seien für V stetig. Wir setzen

$$X_1 = \frac{\partial V}{\partial P_1}, \ldots, X_n = \frac{\partial V}{\partial P_n}, \tag{23}$$

$$\Phi = X_1 P_1 + X_2 P_2 + \ldots + X_n P_n, \tag{24}$$

$$Z = z - V + \Phi \tag{25}$$

und stellen genau wie oben fest, daß die durch (22), (23), (25) erklärte Transformation eine Berührungstransformation ist. Die transformierte Differentialgleichung gewinnt man durch Elimination von $p_1, \ldots, p_n$ aus (21), (23) und (25).

Dieselbe wird

$$Z = X_1 P_1 + \ldots + X_n P_n, \tag{26}$$

also wieder eine *Clairaut*sche Differentialgleichung. Die transformierten charakteristischen Differentialgleichungen werden daher

$$\begin{aligned} X_i' &= -X_i && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ Z' &= -Z \\ P_i' &= \quad 0 && (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Also werden die Charakteristiken

$$\begin{cases} X_k + m_k X_1 = 0 & (k = 2, \ldots, n) \\ Z + n X_1 = 0 \\ P_i = a_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{27}$$

wo die a_i, m_k willkürliche Konstanten sind. Für die Integralstreifen liefert (26) insbesondere

$$n = -a_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \ldots + a_n m_n.$$

Daher werden die Lösungen der ursprünglichen zu $f(x, y, z, p, q) = 0$ gehörigen charakteristischen Differentialgleichungen gegeben durch (22) und durch

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial P_k} + m_k \dfrac{\partial V}{\partial P_1} = 0 & (k = 2, \ldots, n) \\ z - V(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) + a_1 \dfrac{\partial V}{\partial P_1} + \ldots + a_n \dfrac{\partial V}{\partial P_n} + n \dfrac{\partial V}{\partial P_1} = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Insbesondere werden also die charakteristischen *Integralstreifen* gegeben durch

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a_k} + m_k \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = 0 & (k = 2, \ldots, n) \\ z - V(x_1, \ldots, x_n, a_n, \ldots, a_n) = 0 \\ p_i = \dfrac{\partial V(x, a)}{\partial x_i} (i = 1, 2 \ldots n). \end{cases} \tag{29}$$

Wegen des umkehrbar eindeutigen Charakters der Berührungstransformationen müssen die Lösungen durch (28) bzw. (29) völlig und eindeutig bestimmt sein. Denn dies ist bei (27) so.

Es bleibt nun die Konstruktion eines vollständigen Integrals übrig. Dazu ist es nötig, die Betrachtungen der §§ 5 und 6 zu übertragen. Die dort verwendeten Klammerausdrücke sind jetzt so zu erklären:

$$[g,h] = \frac{\partial g}{\partial p_1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial z}p_1\right) + \frac{\partial g}{\partial p_2}\left(\frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial z}p_2\right) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial p_n}\left(\frac{\partial h}{\partial x_n} + \frac{\partial h}{\partial z}p_n\right)$$
$$- \frac{\partial h}{\partial p_1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial z}p_1\right) - \frac{\partial h}{\partial p_2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial z}p_2\right) - \cdots - \frac{\partial h}{\partial p_n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_n} + \frac{\partial g}{\partial z}p_n\right).$$

Man sieht genau wie damals ein, daß es darauf ankommt, $n-1$ samt ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ zu finden, die unter sich und mit f in Involution liegen, und zwar so, daß das System

$$f = 0, f_1 = a_1, \ldots, f_{n-1} = a_{n-1}$$

nach $p_1, \ldots, p_n$ auflösbar ist, d. h. eine nicht verschwindende Funktionaldeterminante hat. Dann erfüllen eben wegen der Involutionsbedingung die n sich für die p ergebenden Funktionen die Integrabilitätsbedingungen und man kann die entstandenen n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_{n-1}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n)$$

integrieren. Dabei kommt noch eine letzte Integrationskonstante a_n herein und die entstehende Funktion

$$z = V(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$$

ist ein vollständiges Integral von $f = 0$. Die Integrationsarbeit kann man sich wie damals zum Teil sparen, wenn man noch eine weitere mit $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ in Involution liegende Funktion f_n kennt. Kann man dann das Gleichungssystem

$$f = 0, f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$$

nach $z, p_1, \ldots, p_n$ auflösen, so kann man daraus durch eine Quadratur ein vollständiges Integral von $f = 0$ finden. Das möge der Leser an Hand der S. 220 gegebenen ausführlichen Darlegungen nachprüfen. Wir wollen uns die hier vorliegenden Verhältnisse noch etwas deutlicher vor Augen führen.

Wir können das letzte Ergebnis auch so aussprechen: *Kennt man $n+1$ wechselweise in Involution liegende Integrale*

$$f = 0, f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$$

des Systems der charakteristischen Gleichungen, so kann man die $n-1$ noch fehlenden Integrale durch bloße Differentiations- und Eliminationsprozesse verbunden mit Quadraturen ermitteln. Die Kenntnis von $2n$ Integralen ermöglicht es ja erst, die $2n$ einen charakteristischen Streifen bestimmenden Funktionen zu gewinnen[1]). Aus den $n+1$

[1]) Dabei wird allerdings von der durch die Differentialgleichungen vorgeschriebenen Wahl des Parameters t abgesehen.

in Involution liegenden Integralen gewinnt man nämlich, wie wir sahen, durch Quadraturen ein vollständiges Integral und daraus durch Differentiationsprozesse $n-1$ weitere Integrale der charakteristischen Differentialgleichungen.

Dies Ergebnis kann man nun aber auch direkt durch Vermittlung einer Berührungstransformation ohne den Umweg über das vollständige Integral gewinnen. Dabei erweist sich alsdann auch die zur Bestimmung des vollständigen Integrals nötige Quadratur als überflüssig. Um das einzusehen, ist es nötig, die Theorie der Berührungstransformationen noch etwas weiter zu verfolgen. Wir knüpfen wieder an die Überlegungen des § 10 an. Wir ergänzen zunächst die damaligen Betrachtungen durch den folgenden Satz: *Wenn die Transformationen*

$$\left.\begin{aligned} X_i &= X_i(x, z, p) \\ Z &= Z(x, z, p) \\ P_i &= P_i(x, z, p) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Berührungstransformation bilden, wenn also die Bedingung

$$Z' - \sum P_i X_i' = \varrho\,(z' - \sum p_i x_i') \qquad (\varrho \neq 0)$$

besteht, dann gelten die folgenden Involutionsbedingungen

$$\begin{aligned} [X_i, X_k] &= 0 && (i, k = 1, 2, \ldots, n) \\ [X_i, Z] &= 0 && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ [P_i, P_k] &= 0 && (i, k = 1, 2, \ldots, n) \\ [X_i, P_k] &= 0 && (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n) \\ [X_i, P_i] &= -\varrho && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ [Z, P_i] &= -\varrho P_i && (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Zum Beweis denken wir uns die Formel (14′) von S. 242 für n Variable aufgeschrieben und tragen darin die aus (17) folgenden Werte der x', p' ein. Dann erhält man

$$\varrho u' = \sum [P_i, u] X_i' - \sum [X_i, u] P_i'.$$

Dies wende man der Reihe nach auf $u = X_i, Z, P_i$ an. Dann ergeben sich die angegebenen Involutionsbeziehungen. Man kann diesen Satz umkehren: *Es seien $n+1$ Funktionen X_i, Z vorgelegt. Die X_i sollen voneinander unabhängig sein; d. h. es sollen Funktionen sein, für welche nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dX_1}{dx_1}, \ldots, \dfrac{dX_1}{dx_n} & \dfrac{\partial X_1}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \vdots \\ \dfrac{dX_n}{dx_1}, \ldots, \dfrac{dX_n}{dx_n} & \dfrac{\partial X_n}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Die X_i sollen wechselweise und mit Z in Involution

liegen. Dann kann man auf genau eine Weise n Funktionen P_i bestimmen, für die

$$Z' - \sum P_i X_i' = \varrho(z' - \sum p_i x_i')$$

gilt.

Für die P ergeben sich die Beziehungen A und B von S. 244. Diese sehen jetzt so aus:

$$\left.\begin{aligned} A_k &\equiv \frac{\partial Z}{\partial p_k} - \sum P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0 \\ B_k &\equiv \frac{dZ}{dx_k} - \sum P_i \frac{dX_i}{dx_k} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Frage ist also zunächst, ob man diese $2n$ Gleichungen durch passende Wahl der P_i erfüllen kann. Wir haben zu beweisen, daß dies auf genau eine Weise möglich ist. Jedenfalls folgt aus dem Nichtverschwinden der angegebenen Matrix, daß man n unter den $2n$ Gleichungen für die P_i ausfindig machen kann, aus welchen sich die P_i eindeutig bestimmen lassen. Dann ist zu zeigen, daß diese P_i auch den übrigen n Gleichungen genügen. Zum Beweise bilde ich

$$\sum \left(A_k \frac{dX_i}{dx_k} - B_k \frac{\partial X_i}{\partial p_k} \right) = [Z, X_i] - \sum P_k [X_k, X_i] = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Wenn man nun aus n der $2n$ Gleichungen $A_k = 0$, $B_k = 0$ mit nicht verschwindender Determinante die P_i berechnet hat, so bleiben hier gerade n homogene lineare Gleichungen für die n dabei noch nicht benutzten A_k, B_k übrig. Nun überzeugt man sich aber leicht, daß man annehmen darf, daß in der nichtverschwindenden Determinante keine zwei Kolonnen vorkommen, in welchen die X_i nach einem x und p gleicher Nummer differenziert sind. Denn wenn diese Determinanten alle verschwänden, so wären, wie man leicht überlegt, auch alle andern Null. Wir dürfen auch um so mehr diese Annahme machen, als wir nachher nur diesen Fall benötigen. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist aber dann genau die desjenigen Systems, aus dem wir gerade die P_i bestimmt hatten, ist also von Null verschieden. Daher müssen auch die anderen n der A_k, B_k verschwinden. Den Wert von ϱ entnimmt man dann aus der hier entsprechenden ersten der Gleichungen (A) von S. 244.

Nun können wir den S. 252 angeführten Satz leicht direkt beweisen. Denn es sollen uns ja $n + 1$ Funktionen gegeben sein, deren Funktionaldeterminante hinsichtlich der $z, p_1, \ldots, p_n$ nicht verschwindet. Diese sollten weiter paarweise in Involution liegen. Diese Funktionen seien

$$Z = f(x, z, p), \quad X_1 = f_1(x, z, p), \quad X_n = f_n(x, z, p).$$

Wir konstruieren Funktionen $P_1, \ldots, P_n$, welche diese zu einer Berührungstransformation ergänzen. Aus der die charakteristischen

Gleichungen bestimmenden Funktion f wird also nun Z. Daher gehen die charakteristischen Gleichungen über in

$$\begin{aligned} X_i' &= 0 \\ Z' &= 0 \\ P_i' &= -P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Die Lösungen sind also

$$\begin{aligned} X_i &= a_i \\ Z &= a_0 \\ P_i &= c_i e^{-t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Sieht man also von der Wahl des Parameters t ab, so werden die Integrale der ursprünglichen charakteristischen Differentialgleichungen

$$f = 0, f_i = a_i (i = 1, 2, \ldots, n), \quad P_k + b_k P_1 = 0 (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Man kann somit tatsächlich die übrigen $n - 1$ Integrale durch Differentiation und Auflösung linearer Gleichungen gewinnen, falls außer $f = 0$ noch n weitere mit f und untereinander in Involution liegende voneinander unabhängige Integrale der charakteristischen Differentialgleichungen bekannt sind.

Auch diese Überlegungen lassen wieder die zentrale Stellung des vollständigen Integrals erkennen. Denn löst man die Gleichungen $f = 0, f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$ nach $z, p_1, \ldots, p_n$ auf, so erhält man ja in z gerade ein vollständiges Integral und in den p_i seine Ableitungen. Noch bleibt aber die Frage offen, wie man ein solches vollständiges Integral findet. Die Bestimmung desselben kann man z. B. auf die Auffindung solcher $n + 1$ in Involution liegenden Integrale zurückführen. Und die sukzessive Berechnung solcher zu den vorher schon bestimmten in Involution liegenden Integralen läuft ersichtlich nach der Definition der Klammerausdrücke auf die Auflösung eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen hinaus. Ich will diese Überlegungen aber nicht weiter verfolgen, zumal in den nachfolgenden Betrachtungen eine allgemeine Methode zur Behandlung beliebiger Systeme von partiellen Differentialgleichungen enthalten ist.

Unsere seitherigen Betrachtungen lassen noch die Frage offen, welchen Vorteil man aus der Kenntnis *einiger* mit f und untereinander in Involution liegenden Integrale ziehen kann. Sie enthalten nämlich die Antwort auf diese Frage nur für den Fall, daß man $n + 1$ solcher in Involution liegenden Integrale kennt. Früheren Erwägungen kann man aber die Antwort auf diese Frage entnehmen für den Fall, daß man n solche in Involution liegende Integrale kennt, und unter der Annahme, daß man die Gleichungen

$$f = 0, f_1 = a_1, \ldots, f_{n-1} = a_{n-1}$$

(unter f_i die Integrale verstanden) nach den p_i auflösen kann. Dann kann man ähnlich wie S. 225 durch eine Quadratur ein vollständiges

Integral bestimmen. Wir wollen aber nun die Frage allgemein aufrollen. Wir wollen die Methode angeben, auf die die Untersuchungen von *Lie* geführt haben. Sie führt zu einer sehr eleganten Antwort auf die Frage, welchen Vorteil man aus der Kenntnis einiger in Involution liegenden Integrale für die Integration ziehen kann.

Gegeben seien die in Involution liegenden Integrale

$$f = 0, f_1 = a_1, \ldots, f_k = a_k. \tag{30}$$

Zunächst kann man nun einen ersten Schritt machen, der genau dem entspricht, den wir in dem Falle machten, wo $n+1$ in Involution liegende Integrale gegeben sind. Wir suchen die $k+1$ Gleichungen nach $k+1$ der Ableitungen aufzulösen. Zu dem Zweck müssen wir noch annehmen, daß die f_i mit den Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in einem gewissen Gebiet der x, z, p stetig und eindeutig sind, sowie daß die Matrix

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n} \\ \\ \frac{\partial f_k}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial p_n} \end{matrix} \right|$$

den Rang $k+1$ besitzt. Es ist dann keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß man die Gleichungen (30) nach den $p_1, \ldots, p_{k+1}$ auflösen kann. Diese Auflösung möge ergeben

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= \varphi_1(x, z, p_{k+2} \ldots p_n) \\ p_2 &= \varphi_2(x, z, p_{k+2} \ldots p_n) \\ &\vdots \\ p_{k+1} &= \varphi_{k+1}(x, z, p_{k+2} \ldots p_n). \end{aligned} \right. \tag{31}$$

In dem Falle, wo $n+1$ Integrale bekannt waren, bestimmten wir dann ein gemeinsames Integral aller, und dies erwies sich als das vollständige Integral. Es war eben dann allen diesen Gleichungen bei festen $a_1 \ldots a_n$ nur ein einziges Integral gemeinsam. Im Falle, wo n Integrale bekannt waren, war ihnen eine einparametrige Schar von Integralen gemeinsam. Heranziehung der übrigen a_i führte wieder zum vollständigen Integral. Diese Erfahrungen legen es nahe, nun nach einer $n-k$-parametrigen, den Gleichungen (31) gemeinsamen Schar von Integralen zu fragen in der Hoffnung, so wieder zu einem vollständigen Integral zu gelangen. Nun aber wissen wir von S. 220, daß jedes den Gleichungen (31) gemeinsame Integral auch den Gleichungen $[p_i - \varphi_i, p_l - \varphi_l] = 0$ genügt. Im Bestreben, diese Klammerausdrücke zu bilden, werden wir gewahr, daß sie identisch verschwinden, daß also auch die Funktionen $p_i - \varphi_i$ paarweise in Involution liegen.

Dies wollen wir nun zunächst beweisen. Es gilt also der Satz:

Wenn die μ Funktionen $F_1, \ldots, F_\mu$ stetige erste Ableitungen haben und in Involution liegen, wenn sie hinsichtlich der $p_1 \ldots p_\mu$ in einem

gewissen Bereich eine nichtverschwindende Funktionaldeterminante besitzen, und wenn sich durch Auflösung der Gleichungen

$$F_1 = a_1 \dots F_\mu = a_\mu \text{ nach } p_1 \dots p_\mu \tag{32}$$

$$\begin{cases} p_1 = \varphi_1(x, z, p_{\mu+1} \cdots p_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_\mu = \varphi_\mu(x, z, p_{\mu+1} \cdots p_n) \end{cases} \tag{33}$$

ergibt, so liegen auch die $p_i - \varphi_i$ in Involution.

Trägt man die Lösungen (33) in die Gleichungen (32) ein, so entstehen gewisse Identitäten, durch deren Differentiation sich ergibt

$$\frac{d F_i}{d x_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial p_\nu} \frac{d \varphi_\nu}{d x_\lambda} = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_\varrho} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial p_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_\varrho} = 0 \qquad \varrho = \mu + 1, \dots, n.$$

Da aber weiter $\frac{d \varphi_\nu}{d x_\lambda} = \frac{d}{d x_\lambda}(\varphi_\nu - p_\nu)$ und $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial}{\partial p_\varrho}(\varphi_\nu - p_\nu)$ ist, so kann man diese Gleichungen auch so schreiben:

$$\frac{d F_i}{d x_\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial p_\nu} \frac{d (p_\nu - \varphi_\nu)}{d x_\lambda},$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_\lambda} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial p_\nu} \frac{\partial (p_\nu - \varphi_\nu)}{\partial p_\lambda}.$$

Diese gelten nun beide für $\lambda = 1, 2, \dots, n$. Denn man sieht leicht, daß die nur für $\lambda = \mu + 1, \dots, n$ abgeleitete zweite auch für die kleineren λ mit Selbstverständlichkeit gilt. Daraus ergibt sich nun sofort

$$[F_i, F_k] = \sum_{\varrho=1}^{\mu} \sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial F_i}{\partial p_\varrho} \frac{\partial F_k}{\partial p_\sigma} [p_\varrho - \varphi_\varrho, p_\sigma - \varphi_\sigma].$$

Schreibt man diese Gleichungen für $i = 1, 2, \dots, n$ auf und beachtet das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante $\frac{d (F_1 \dots F_\mu)}{d (p_1 \dots p_\mu)}$, so ergibt sich daraus

$$\sum_{\sigma=1}^{\mu} \frac{\partial F_k}{\partial p_\sigma} [p_\varrho - \varphi_\varrho, p_\sigma - \varphi_\sigma] = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \dots, \mu).$$

Diese schreibe man wieder für $k = 1, 2, \dots, n$ auf und schließe dann aus dem Nichtverschwinden der genannten Determinante, daß

$$[p_\varrho - \varphi_\varrho, p_\sigma - \varphi_\sigma] = 0 \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \dots, \mu).$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (31) *also, die wir oben durch Auflösung des Involutionssystems* (30) *erhalten haben, liegen selbst in Involution.* Unser Ziel ist es, ein von $n - k$ Parametern abhängiges ge-

meinsames Integral dieser Gleichungen zu finden. Es liegt nahe[1]), den Gleichungen ein Integral abzugewinnen, das für $x_1 = x_1^{(0)}, \ldots, x_{k+1} = x_{k+1}^{(0)}$ in

$$Z = a_{k+1} + a_{k+2}\, x_{k+2} + \ldots + a_n\, x_n$$

übergeht. Dabei sind $a_{k+1}, \ldots, a_n$ die gewünschten Parameter. Wir werden das ein vollständiges Integral des Involutionssystems nennen. Es liegt nahe, mit der sogenannten *Mayer*schen Transformation

$$x_1 = x_1^{(0)} + y_1,\ x_2 = x_2^{(0)} + y_1 y_2, \ldots, x_{k+1} = x_{k+1}^{(0)} + y_1 y_{k+1}$$

in die Gleichungen hineinzugehen. Dabei gehen die Gleichungen (31) in die folgenden über

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial y_1} = \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + \ldots + y_{k+1} \cdot \varphi_{k+1} = \Phi_1, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y_2} = y_1 \varphi_2 = \Phi_2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y_{k+1}} = y_1 \varphi_{k+1} = \Phi_{k+1}. \end{cases}$$

Wenn es nun tatsächlich ein der angegebenen Anfangsbedingung genügendes Integral gibt, so muß dies schon durch die erste Gleichung bestimmt sein. Denn die Anfangsbedingung lautet jetzt

(34′) $Z = a_{k+1} + a_{k+2}\, x_{k+2} + \ldots + a_n\, x_n$ für $y_1 = 0$, d. h. für $x_1 = x_1^{(0)}$.

Wir werden also dies Integral der ersten Gleichung bestimmen und nachweisen, daß es von selbst auch den anderen Gleichungen genügt.

Dies Integral der ersten Gleichung gewinnt man nach S. 250 dadurch, daß man durch die Anfangsmannigfaltigkeit einen Anfangsstreifen legt. Nach S. 250 geht das bei unserer Wahl des Anfangsstreifens immer. So gehören nun zu dem Anfangspunkt $x_{k+2} = b_{k+2} \ldots x_n = b_n$ Anfangs-p-Werte $p_{k+2} = a_{k+2}, \ldots, p_n = a_n$. Der Anfangs-$z$-Wert ist dann $a_{k+1} + a_{k+2}\, b_{k+2} + \ldots + a_n\, b_n$. Durch diese Anfangswerte für $t = 0$ ist eine Lösung der zur ersten partiellen Differentialgleichung gehörigen charakteristischen Gleichungen

$$(35)\qquad \frac{\partial x_\varrho}{\partial y_1} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\varrho},\ \frac{\partial p_\varrho}{\partial y_1} = \frac{d\,\Phi_1}{d\,x_\varrho} \qquad (\varrho = k+2, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \sum_{k+2}^{n} p_\varrho \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\varrho} \text{ usw.}$$

bestimmt. Diese sei

$$x_\varrho = x_\varrho (y_1, y_2, \ldots, y_n, a_{k+1} \ldots a_n, b_{k+2} \ldots b_n)$$
$$z = z\ (y_1, y_2, \ldots, y_n, a_{k+1} \ldots a_n, b_{k+2} \ldots b_n)$$
usw.

[1]) Vgl. oben S. 228 die Bemerkung bei der Definition des vollständigen Integrals.

Dann ist durch diese Gleichungen unmittelbar eine Parameterdarstellung der durch unsere Anfangsbedingung festgelegten Integralfläche gegeben. Die b_i sind dabei die Parameter der Darstellung. Nun ist es leicht, zu verifizieren, daß dieses Integral auch den übrigen partiellen Differentialgleichungen genügt. Um das einzusehen, bilde ich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial y_i} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_i} = \frac{d\Phi_1}{dy_i}.$$

Aus $\left[\frac{\partial z}{\partial y_1} - \Phi_1,\ p_i - \Phi_i\right] = 0$[1]) folgt aber

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} - \frac{d\Phi_1}{dy_i} + \sum_{\varrho=k+2}^{n}\left(\frac{d\Phi_1}{dx_\varrho}\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_\varrho} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_\varrho}\frac{d\Phi_i}{dx_\varrho}\right) = 0.$$

Wegen der charakteristischen Gleichungen aber ist dies

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} - \frac{d\Phi_1}{dy_i} + \sum_{\varrho=k+2}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_\varrho}\frac{dp_\varrho}{dt} + \frac{d\Phi_i}{dx_\varrho}\frac{dx_\varrho}{dt}\right) = 0.$$

Also wird

$$\frac{d\Phi_1}{dy_i} = \frac{d\Phi_i}{dy_1}.$$

Also wird durch Integration nach t

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \Phi_i + C.$$

Da aber für $t = 0$ die Integrationskonstante Null ist, so ist sie überhaupt Null und wir haben

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \Phi_i,$$

wie wir beweisen wollten.

Das gefundene Integral ist ein vollständiges Integral der ersten partiellen Differentialgleichung (34) in einer gewissen Umgebung der Anfangsmannigfaltigkeit. Denn für $t = 0$ hat die Funktionaldeterminante der z, p_ϱ $(\varrho = k+2, \ldots, n)$ hinsichtlich der a_ϱ den Wert Eins. Somit kann man die Gleichungen

$$(36)\qquad \begin{cases} Z &= V(y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \\ p_{k+2} &= \dfrac{\partial V}{\partial x_{k+2}}, \\ \vdots & \\ p_n &= \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{cases}$$

nach den a_ϱ auflösen. Von oben wissen wir bereits, daß auch die Gleichungen

[1]) Bei Änderung der Variablen bleibt die Involutionsbeziehung erhalten.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ &\vdots \\ p_{k+1} &= \frac{\partial V}{\partial x_{k+1}} \end{aligned}$$

nach $a_1 \dots a_k$ auflösbar sind. Denn diese waren ja aus den Gleichungen $f = 0$, $f_1 = a_1, \dots, f_k = a_k$ durch Auflösung nach den $p_1 \dots p_{k+1}$ entstanden. Diese Werte der $a_1 \dots a_k$ kann man in (36) eintragen. Damit hat man das Ergebnis, daß man die Gleichungen

$$\begin{aligned} Z &= V(y_1, y_2 \dots y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \\ p_1 &= \frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ &\vdots \\ p_n &= \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{aligned}$$

nach den $a_1 \dots a_n$ auflösen kann. Damit aber erweist sich

$$z = V_1(x_1 \dots x_n) = V(y_1, y_2 \dots y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$$

nicht nur als Integral der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung $f = 0$, sondern sogar als vollständiges Integral derselben. Somit ist bewiesen, *daß die Kenntnis von $k+1$ in Involution liegenden Integralen von $f = 0$, also die Kenntnis der Integrale $f = 0$, $f_1 = a_1 \dots f_k = a_k$ es erlaubt, die Integration von $f = 0$ auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial y_1} = \Phi_1$ mit $n - k$ unabhängigen Variablen zurückzuführen. Gleichzeitig aber lehrt unsere Betrachtung, daß die Kenntnis von $k+1$ in Involution liegenden Integralen der charakteristischen Gleichungen S. 249, nämlich der Integrale $f = a$, $f_1 = a_1 \dots f_k = a_k$ es erlaubt, dies System auf ein nur noch $2n - k - 1$ Gleichungen umfassendes (35) zurückzuführen, das wieder als System der charakteristischen Gleichungen einer partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial y_1} = \Phi_1$ auftritt.*

Ich schließe diesem Hauptergebnis unserer bisherigen Erörterungen einige Bemerkungen an. Zunächst enthalten unsere Betrachtungen eine *Integrationstheorie der Systeme partieller Differentialgleichungen mit einer unbekannten Funktion.* Man kann nämlich die Untersuchung eines beliebigen solchen Systems von partiellen Differentialgleichungen stets auf die Integration eines Involutionssystems zurückführen. Dies geht deshalb, weil doch für jedes gemeinsame Integral zweier Gleichungen auch der betreffende Klammerausdruck verschwinden muß. Mehr als $n+1$ voneinander unabhängiger solcher Gleichungen können aber für ein Integral nicht bestehen. Denn aus

$n+1$ solchen voneinander unabhängigen Gleichungen kann man durch Auflösung schon z und die Ableitungen p eindeutig finden. Entweder sind dann für diese die übrigen Gleichungen von selbst erfüllt, und dann hat man ein Integral oder man kommt zu Widersprüchen, die sich auch schon darin äußern können, daß die g fundenen p nicht die Ableitungen des gefundenen z sind. Dazu ist nämlich nach S. 253 gerade notwendig und hinreichend, daß die Klammerausdrücke der zur Auflösung benutzten Gleichungen verschwinden. So schließt man leicht, daß man in dem Falle, wo überhaupt gemeinsame Lösungen da sind, nach endlich vielen Schritten auf ein Involutionssystem geführt wird. Und dies kann man nach den vorstehenden Betrachtungen behandeln. Wegen weiterer Einzelheiten muß auf Spezialwerke, wie z. B. *Goursat*: Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung verwiesen werden.

Eine *zweite Bemerkung:* Unsere seitherigen Betrachtungen geben noch keinen Aufschluß darüber, welchen Vorteil man aus der Kenntnis einiger untereinander *nicht* in Involution liegenden Integrale für die Integration ziehen kann. Darüber liegen auch abschließende Untersuchungen von *Lie* vor, die auch in dem erwähnten Werke von *Goursat* zur Darstellung gebracht sind. Sie gipfeln darin, daß der Vorteil, den man aus ihrer Kenntnis ziehen kann, bestimmt ist durch die Zahl der in Involution liegenden Integrale, welche man aus den gegebenen zu bilden vermag. Diese Andeutung mag hier genügen.

Ein aus $k+1$ Gleichungen von n unabhängigen Veränderlichen bestehendes Involutionssystem hat nach unseren Überlegungen ein von $n-k$ Parametern abhängendes Integral gemeinsam. Es hat die Eigentümlichkeit, daß man die Gleichungen (36) nach diesen $n-k$ Parametern auflösen kann. Eliminiert man nun aus den $k+1$ Gleichungen des Involutionssystems die k ersten Ableitungen, so erhält man eine partielle Differentialgleichung für z als Funktion der $n-k$ letzten Ableitungen, in die $x_1 \dots x_k$ nur als Parameter eingehen. Das gefundene $n-k$-parametrige gemeinsame Integral genügt auch dieser neuen Gleichung, und zwar ist es nach der Definition des vollständigen Integrales ein vollständiges Integral dieser neuen Gleichung. Die hinsichtlich der $x_{k+1} \dots x_n$ gebildeten charakteristischen Gleichungen der neuen partiellen Differentialgleichung können daher mit Hilfe dieses vollständigen Integrales in bekannter Weise integriert werden:

$$(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a_\varrho} + b_\varrho \dfrac{\partial V}{\partial a_{k+1}} = 0, \quad \varrho = k+2, \dots, n \\ z \quad = V(x_1, \dots, x_n, \ a_1, \dots, a_n), \\ p_\varrho \ = \dfrac{\partial V}{\partial x_\varrho} \qquad\qquad (\varrho = k+1, \dots, n). \end{cases}$$

Dabei sind die b_k neue willkürliche Konstanten. Man gewinnt die Lösungen der charakteristischen Gleichungen als Funktionen von x_k durch Auflösung dieser Gleichungen nach den $x_{k+1}, \ldots, x_n, z, p_{k+1}, \ldots, p_n$. Nun aber wissen wir, daß uns mit diesem vollständigen Integral der neuen partiellen Differentialgleichung zugleich ein vollständiges Integral der ursprünglichen gegeben ist, wofern wir nur noch die k im Involutionssystem steckenden Parameter $a_1 \ldots a_k$ mit heranziehen. Die Lösungen der ursprünglichen charakteristischen Gleichungen gewinnt man dann durch Auflösung aus dem nachfolgenden Gleichungssystem:

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a_\varrho} + b_\varrho \dfrac{\partial V}{\partial a_k} = 0 & (\varrho = 1, 2, \ldots, n,\ \varrho \neq k) \\ z = V & (x_1, \ldots, x_n,\ a_1, \ldots, a_n) \\ p_\varrho = \dfrac{\partial V}{\partial x_\varrho} & (\varrho = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind die Gleichungen (37) enthalten.

Wir können den Zusammenhang, der hiernach zwischen den charakteristischen Gleichungen der neuen partiellen Differentialgleichung und den charakteristischen Gleichungen der alten besteht, noch deutlicher hervortreten lassen. Hat man nämlich die neuen charakteristischen Gleichungen integriert, so kennt man hiernach die Auflösungen der Gleichungen (37). Man kennt also die Koordinaten $x_{k+1} \ldots x_n$ der Charakteristiken, allerdings noch nicht als Funktionen des Parameters x_{k+1} allein, sondern es gehen noch die k ersten Koordinaten als Parameter ein. Diese aber kann man dann als Funktionen des Parameters x_{k+1} bestimmen, ohne noch einmal auf die Gleichungen zurückgehen zu müssen. Man kann vielmehr aus den Integralen der neuen charakteristischen Gleichungen jedes Integral der neuen partiellen aufbauen. Namentlich also kann man dann auch ihr durch die Anfangsbedingung (34′) bestimmtes, vollständiges Integral angeben. Dies ist aber gerade das dem ganzen Involutionssystem gemeinsame vollständige Integral, das also auch der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung genügt. Und zwar ist es ein vollständiges Integral derselben, wenn man noch die Parameter $a_1 \ldots a_k$ beachtet, von denen es ja auch abhängt. Mit anderen Worten also kann man aus der Kenntnis irgendeines vollständigen Integrales der neuen partiellen erst die Lösungen der neuen charakteristischen Differentialgleichungen, aus diesen alsdann ein vollständiges Integral der alten partiellen, und daraus endlich die Lösungen der gegebenen charakteristischen Gleichungen gewinnen. Damit ist also folgende Regel zu deren Integration gewonnen: *Falls man k mit f und untereinander in Involution liegende unabhängige Integrale kennt, so eliminiert man aus dem Involutionssystem k der Ableitungen der unbekannten Funktion. Für die so entstandene neue partielle Differential-*

gleichung bilde man das System der charakteristischen Gleichungen. Auf ihre Integration ist damit bis auf Eliminationsprozesse die Integration des vorgelegten Systems zurückgeführt.

Schlußbemerkung. Werfen wir einen Blick zurück auf die hiermit abgeschlossene Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, so wird sich uns der Eindruck einer gewissen Kümmerlichkeit aufdrängen. Bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen üppiges Leben, wohlausgestaltete Theorien voll Saft und Kraft; hier aber bleibt alles in der formalen Integrationstheorie stecken. Man erhält Rezepte, wie man theoretisch dies oder jenes ausrechnen kann, man erhält keinen Aufschluß über die *Natur* der Lösungsflächen, ihre Singularitäten z. B., über geschlossene oder algebraische Integrale. Wir haben ein Gebiet hinter uns, dem der Modernismus der Mathematik noch kein neues Leben eingehaucht hat.

Vierter Abschnitt.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Allgemeines.

§ 1. Existenzsatz.

Unsere Ergebnisse im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung legen es nahe, zunächst einmal den Versuch eines ähnlichen Vorgehens zu wagen. Wir wollen also auch jetzt durch Anfangsstreifen Lösungsflächen hindurchlegen. Ich setze dabei voraus, daß die Funktion

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

durch deren Nullsetzen die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1}$$

entsteht, eine eindeutige analytische Funktion ihrer Argumente in einem gewissen für dieselben zugrunde gelegten Bereich sei. Zur Abkürzung werden wir häufig setzen

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Unter einem Streifen verstehen wir wieder fünf analytische Funktionen

$$x = x(u), \; y = y(u), \; z = z(u), \; p = p(u), \; q = q(u),$$

die für einen gewissen Bereich des Parameters u eindeutig und regulär sind und die noch der Streifenbedingung

$$z' = p\,x' + q\,y' \tag{2}$$

genügen. Bei Gleichungen erster Ordnung ergab sich die Möglichkeit, im allgemeinen durch eine gegebene Kurve einen Integralstreifen hindurchzulegen. Die partielle Differentialgleichung und die Streifen-

bedingung ergaben nämlich zwei Gleichungen, aus welchen man im allgemeinen zwei der 5 Funktionen, z. B. p und q, durch die 3 anderen ausdrücken kann. Hier bei den Gleichungen zweiter Ordnung entfällt diese Möglichkeit wegen des Auftretens der zweiten Ableitungen r, s, t. Daher erweitern wir unsere Begriffsbildung durch Einführung von *Streifen zweiter Ordnung* und nennen zur Unterscheidung die bisher schlechthin Streifen genannten Gebilde *Streifen erster Ordnung*. Unter einem Streifen zweiter Ordnung verstehen wir nun 8 in einem gewissen Bereich des Parameters u eindeutige reguläre analytische Funktionen

$$x = x(u),\ y = y(u),\ z = z(u),\ p = p(u),\ q = q(u),\ r = r(u),\ s = s(u),\ t = t(u),$$

die noch gewissen Streifenbedingungen genügen müssen. Eine solche ist zunächst einmal die für die 5 ersten Funktionen bestehende Gleichung (2), die auch jetzt wieder erfüllt sein soll. Dazu kommen aber noch zwei weitere, die aus der gleichen Quelle fließen. Wir finden sie, wenn wir uns vorstellen, daß der durch die fünf ersten Funktionen bestimmte Streifen erster Ordnung einer Fläche angehört, deren zweite Ableitungen r, s, t sind. Dann muß längs des Streifens

$$\begin{cases} p' = r\,x' + s\,y', \\ q' = s\,x' + t\,y' \end{cases} \tag{3}$$

sein, und das sind die beiden neuen Streifenbedingungen.

Nunmehr wollen wir also versuchen, durch einen Streifen erster Ordnung eine Integralfläche zu legen. Wir werden damit beginnen, erst einmal einen Integralstreifen zweiter Ordnung hindurchzulegen. Es gilt also jetzt, 3 Funktionen

$$r(u),\ s(u),\ t(u)$$

aus den 3 Gleichungen (1) und (3) zu gewinnen. Bei der Möglichkeit, die 3 Gleichungen aufzulösen, spielt ihre Funktionaldeterminante eine Rolle. Ich setze zur Abkürzung

$$\mathsf{P} = \frac{\partial F}{\partial r},\ \Sigma = \frac{\partial F}{\partial s},\ \mathsf{T} = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Dann ist diese Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \\ \mathsf{P} & \Sigma & \mathsf{T} \end{vmatrix} = \mathsf{P}\,y'^2 - \Sigma\,x'\,y' + \mathsf{T}\,x'^2.$$

Setzt man nun voraus, daß man ein erstes Element zweiter Ordnung

$$x_0 = x(u_0),\ \ldots,\ t_0 = t(u_0)$$

hat, das den 3 Gleichungen genügt und für das die Determinante

nicht verschwindet, so kann man nach einem bekannten Satz über implizite Funktionen für einen gewissen Bereich $|u - u_0| < \delta$ die Auflösung bewerkstelligen und für diesen Parameterbereich also einen Integralstreifen zweiter Ordnung bestimmen. Man sieht, wie hier eine gewisse Ausnahmerolle diejenigen Integralstreifen zweiter Ordnung spielen werden, für die die Gleichung

$$\mathsf{P}\,y'^2 - \Sigma x' y' + \mathsf{T}\,x'^2 = 0 \tag{4}$$

besteht. Diese wollen wir *charakteristische Streifen* zweiter Ordnung nennen.

Es wäre nun weiter zu zeigen, daß durch einen nichtcharakteristischen Streifen zweiter Ordnung genau eine Integralfläche hindurchgeht. Um aber bei diesem Nachweis unangenehmer Rechnerei auszuweichen, wollen wir durch eine gewisse Transformation zu einem einfacheren Falle übergehen. Zunächst will ich die Trägerkurve des nicht charakteristischen Streifens in die x-Achse überführen. Zu dem Zwecke führe ich statt x den Parameter u als eine unabhängige Veränderliche $\mathfrak{x}$ ein und setze außerdem $\mathfrak{y} = y - y(u)$, $\mathfrak{z} = z - z(u)$. Dies setzt also voraus, daß man $x = x(u)$ nach u auflösen kann, daß also die Ableitung $x'(u)$ nicht verschwindet. Durch diese Transformation geht unser Streifen in einen neuen Streifen über — wie man leicht nachrechnet. Er erstreckt sich längs eines Stückes der $\mathfrak{x}$-Achse. Soll er kein charakteristischer Streifen sein, so darf also jene Determinante nicht verschwinden. Da aber jetzt längs des Streifens $\mathfrak{y}' = 0$ ist, so darf jetzt T nicht verschwinden. Daher kann man in der Umgebung des gegebenen Streifens die partielle Differentialgleichung nach t auflösen. Wir dürfen daher die weitere Betrachtung an eine Differentialgleichung der Gestalt

$$t = f(x, y, z, p, q, r, s) \tag{5}$$

anknüpfen. Hier ist $f(x, y, z, p, q, r, s)$ eine eindeutige analytische Funktion in einem gewissen Bereich ihrer Argumente; gegeben ist ein längs einer Strecke der x-Achse erstreckter Streifen erster Ordnung. Durch ihn geht, wie wir schon wissen, gerade ein Streifen zweiter Ordnung. Es soll gezeigt werden, daß durch diesen genau eine Integralfläche geht. Dieser Nachweis kann jetzt ohne sonderliche rechnerische Schwierigkeit erbracht werden. Es handelt sich also darum, eine Lösung $z(x, y)$ von (5) zu finden, so daß $z(x, 0) = 0$, $p(x, 0) = 0$[1]), $q(x, 0) = q(x)$ ist. Durch eine weitere Transformation kann man die Aufgabe erneut ein wenig vereinfachen. Ich setze nämlich an

$$z_1 = z - y\,q(x).$$

[1]) Dies folgt daraus, daß jedes Element des Streifens durch die x-Achse geht.

Dann wird

$$p_1 = p - y\,q', \quad q_1 = q - q(x),$$
$$r_1 = r - y\,q'', \quad s_1 = s - q', \quad t_1 = t.$$

Die Differentialgleichung geht dadurch in eine neue derselben Art über.

Die Aufgabe lautet also jetzt: Es ist ein Integral von (5) zu bestimmen, so daß

$$z(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad q(x, 0) = 0$$

ist. Diese Aufgabe kann nun leicht durch Potenzreihenentwicklung gelöst werden. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß das Intervall der x-Achse, in dem der Streifen gegeben ist, den Punkt $x = 0$ enthält. Dann ist also die Aufgabe die, das gesuchte Integral nach Potenzen von x und y zu entwickeln. Für die zweiten Ableitungen erhält man zunächst die 3 Gleichungen

$$t = f(x, y, z, p, q, r, s),$$
$$p' = r\,x' + s\,y',$$
$$q' = s\,x' + t\,y',$$

wie sie ja für einen Streifen zweiter Ordnung gelten müssen. Trägt man hier die Bestimmungsstücke des Streifens erster Ordnung bei $x = 0$, $y = 0$ ein, so werden diese Gleichungen

$$t = f(0, 0, 0, 0, 0, r, s),$$
$$0 = r,$$
$$0 = s$$

und man entnimmt ihnen $r = 0$, $s = 0$, $t = f(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Betreffs der höheren Ableitungen von z sieht man ohne weiteres ein, daß die Ableitungen $\frac{\partial^\mu z}{\partial x^\mu}$ und $\frac{\partial^\mu z}{\partial y \cdot \partial x^{\mu-1}}$ in $x = y = 0$ alle verschwinden, denn sie können durch Differentiation von $z(x, 0)$ und von $q(x, 0)$ nach x erhalten werden. Da aber beide zu differenzierende Funktionen identisch in x verschwinden, so sind diese Ableitungen auch Null. Die noch zu berechnenden Ableitungen enthalten also alle eine mindestens zweimalige Differentiation nach y. Somit können sie durch Differentiation von t erhalten werden. In $t = f(x, y, z, p, q, r, s)$ stehen aber rechts nur Ableitungen, die eine höchstens einmalige Differentiation nach y enthalten. Differenziert man also t z. B. n-mal nach x, so läßt sich diese Ableitung somit durch andere ausdrücken, die eine höchstens einmalige Differentiation nach y enthalten. Diese sind aber, wie schon festgestellt, bei $x = y = 0$ alle Null. Somit sind auch alle Ableitungen bekannt, in welchen eine höchstens zweimalige Differentiation nach y vorkommt. Differenziert man aber t n-mal nach x und m-mal nach y, so erscheint diese Ableitung ausgedrückt durch andere, in welchen eine höchstens $(m - 1)$-malige Differentiation nach

y vorkommt. Somit kann man auch diese Ableitungen rekurrent ausrechnen. Somit sind bei $x = y = 0$ alle Ableitungen des gesuchten Integrales eindeutig bestimmt, und es fehlt nun nur noch der Nachweis, daß die so für die Integralfläche gefundene Potenzreihe konvergiert. Dieser Nachweis wird mit Hilfe der von *Cauchy* erfundenen *Majorantenmethode* geführt. Diese Methode knüpft daran an, daß sich nach der eben angestellten Überlegung die höheren Ableitungen linear aus gewissen niedrigeren ausdrücken lassen, mit gewissen Koeffizienten, welche weiter nichts sind als die Ableitungen von $f(x, y, z, p, q, r, s)$ an der Stelle $x = y = z = p = q = r = s = 0$. Wir ziehen daher zum Vergleich eine andere partielle Differentialgleichung heran, deren Funktion $f(x, y, z, p, q, r, s)$ bei $x = y = 0$ lauter größere Ableitungen hat. Dann hat die nach dem gleichen Verfahren für ihre den gleichen Anfangsbedingungen genügende Lösung zu findende Potenzreihe sicher größere Koeffizienten. Können wir nun aber irgendwie die Konvergenz dieser neuen Reihe in einem gewissen Bereich der x und y feststellen, so folgt daraus auch die Konvergenz derjenigen Reihe, welche der ersten Differentialgleichung genügt. Um eine geeignete derartige Majorante angeben zu können, nehme ich an, $f(x, y, z, p, q, r, s)$ sei für $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho$, ..., $|s| < \varrho$ regulär[1]) und der Betrag von f läge in diesem Bereiche unter M. Dann lehrt der *Cauchy*sche Koeffizientensatz der Funktionentheorie, daß bei $x = y = 0$

$$\frac{1}{\nu_1! \ldots, \nu_7!} \left| \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_7} f}{\partial x^{\nu_1}, \partial y^{\nu_2}, \ldots, \partial s^{\nu_7}} \right| < M$$

ist. Die entsprechenden Ableitungen von

$$V = \frac{M}{(1-x)(1-y)\ldots(1-s)}$$

sind nun aber gerade diesen Schranken gleich. Es ist nämlich

$$V = \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_7 \geq 0} M \cdot x^{\nu_1} \ldots s^{\nu_7},$$

Daher ist

$$t = V$$

als majorante Gleichung zu brauchen. Aber man übersieht nicht sofort, daß sie ein unseren Anfangsbedingungen genügendes Integral besitzt. Daher benutzen wir eine andere Majorante.

Am einfachsten ist wohl der folgende Weg. Man gehe zunächst zu einem System über, das mit der Gleichung

$$t = V(x, y, z, p, q, r, s) \tag{6}$$

[1]) Da es natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, aber formale Vereinfachungen mit sich bringt, werde weiterhin $\varrho = 1$ angenommen.

gleichbedeutend ist[1]). Dies System ist

$$\begin{aligned} z_{1y} &= z_3\,, \\ z_{2y} &= z_{3x}\,, \\ z_{3y} &= V(x, y, z_1, z_2, z_3, z_{2x}, z_{3x})\,. \end{aligned}$$

Es ist unter den Anfangsbedingungen

$$z_1(x, 0) = 0\,,\ z_2(x, 0) = 0\,,\ z_3(x, 0) = 0 \tag{7}$$

zu integrieren und entsteht offenbar aus der Gleichung zweiter Ordnung (6), indem man

$$z = z_1,\ p = z_2,\ q = z_3$$

setzt. Und umgekehrt stehen 3 Funktionen, welche dem System und den Anfangsbedingungen genügen, in der Beziehung zueinander, daß $z_2 = z_{1x}$, $z_3 = z_{1y}$ ist. Der Leser wird das leicht nachrechnen. Wir denken uns nun M so gewählt, daß auch z_3 und z_{3x}, d. i. s dem Betrag nach kleiner als M sind. Dazu muß offenbar nur $M > 1$ gewählt werden, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann. Alsdann setzen wir folgende majoranten Gleichungen an

$$\left\{\begin{aligned} z_{1y} &= \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_{2x})(1-z_{3x})}\,, \\ z_{2y} &= \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_{2x})(1-z_{3x})}\,, \\ z_{3y} &= \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_{2x})(1-z_{3x})}\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Daß das wirklich Majoranten sind, bestätigt man ohne weiteres, denn bei der Entwicklung der rechten Seiten, d. i.

$$M \sum x^k \sum y^k \sum z_1^{\,k} \sum z_2^{\,k} \sum z_3^{\,k} \sum z_{2x}^k \sum z_{3x}^k\,,$$

kommen doch alle möglichen Potenzprodukte wirklich vor und ihre Koeffizienten sind alle positive ganze Zahlen.

Die majoranten Gleichungen sind also unter den Anfangsbedingungen (7) zu integrieren. Da auch diese wie die 3 Gleichungen völlig symmetrisch in den 3 unbekannten Funktionen aufgebaut sind, ist der Ansatz $z_1 = z_2 = z_3 = \mathfrak{z}$ erlaubt, und es bleibt somit nur die eine Gleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-\mathfrak{z})^3(1-\mathfrak{z}_x)^2}$$

unter der Anfangsbedingung $\mathfrak{z}(x, 0) = 0$ zu integrieren und zu zeigen, daß die Lösung in der Umgebung von $x = y = 0$ nach Potenzen von x und y entwickelt werden kann. Daß aber die Lösungen von analytischen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit analytischen Anfangsbedingungen analytisch sind, läßt die früher gegebene Integrationstheorie erkennen.

[1]) Man hätte natürlich auch von Anfang an zu einem System übergehen können.

§ 2. Charakteristiken.

Im Laufe unserer Betrachtungen über das Existenztheorem sind wir auf die Charakteristiken geführt worden. Und zwar verstanden wir unter einem charakteristischen Streifen zweiter Ordnung die 8 Funktionen

$$x(u),\ \ldots,\ s(u),\ t(u),$$

welche der partiellen Differentialgleichung (1) bzw. (5), den 3 Streifenbedingungen (2), (3) und der Gleichung (4) genügten. Ähnlich wie die charakteristischen Streifen erster Ordnung bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, spielten auch hier diese Streifen eine Ausnahmerolle beim Existenzsatz. Es gelten auch weiterhin für sie ähnliche Sätze wie bei den Gleichungen erster Ordnung. Ich will aber nur kurz bei diesen Dingen verweilen, so interessant sie an sich sein mögen. Der Grund ist der, daß die Betrachtungen zu einer Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht ausgebaut werden konnten. Es ist nicht gelungen, die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung auf ein System von gewöhnlichen zurückzuführen. Ob das möglich ist, ist noch eine offene Frage. Das ist auch der Grund, aus dem wir mit dem Existenzsatz nicht wie bei den Gleichungen erster Ordnung über den analytischen Fall hinausgedeihen konnten, und daß sich hier nicht der Existenzsatz organisch einer Integrationstheorie einfügt. Ich will somit nur ohne Beweis einige Sätze über Charakteristiken hervorheben. Zunächst sieht man, daß es zwei Scharen von Charakteristiken gibt, da die Gleichung (4) vom zweiten Grade ist. Verfolgt man aber die Sache näher, so erkennt man, daß aus unserer Definition nur 6 gewöhnliche Differentialgleichungen für die 8 Streifenfunktionen fließen. Ein Streifen zweiter Ordnung ist also nicht durch eines seiner Elemente bestimmt. Wenn man auch beweisen kann, daß auf jeder Integralfläche durch jedes ihrer Elemente ein ihr angehöriger charakteristischer Streifen zweiter Ordnung gelegt werden kann, so erhält man damit doch keine Integrationstheorie, wie bei den Gleichungen erster Ordnung, wo man nur durch die Elemente eines nichtcharakteristischen Anfangsstreifens die dadurch bestimmten charakteristischen Streifen hindurchlegen mußte. Durch einen jeden charakteristischen Streifen zweiter Ordnung kann man unendlich viele Integralflächen hindurchlegen. Sie haben längs dieses Streifens eine Berührung zweiter Ordnung. Falls zwei Charakteristiken zweiter Ordnung verschiedenen Scharen angehören und ein Element zweiter Ordnung gemeinsam haben, so geht durch beide genau eine Integralfläche hindurch. Diese Bemerkung fließt aus einem allgemeinen von *Goursat* angegebenen Existenzsatz, den wir auch bald bei gewissen linearen Differential-

gleichungen bestätigt finden werden. Dieser Satz sagt kurz aus, daß man durch zwei einander schneidende Raumkurven genau eine Integralfläche legen kann. Genauer formuliert sind die folgenden Voraussetzungen zu machen. Die beiden gegebenen analytischen Raumkurven sollen von einem Punkte ausgehen und zwei von diesem Punkte ausgehende Trägerkurven von charakteristischen Streifen berühren. Diese beiden Streifen sollen verschiedenen Scharen angehören. Dann geht durch beide Kurven gerade eine Integralfläche, welche sich in der Umgebung der Koordinaten x_0, y_0 des Schnittpunktes nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickeln läßt. Zunächst kann man durch eine Transformation der x, y erreichen, daß die beiden Kurven der x-z- bzw. der y-z-Ebene angehören. Denn durch eine lineare Transformation der x, y kann man zunächst bewerkstelligen, daß die Tangenten der beiden Kurven in diese Ebenen fallen und daß der Schnittpunkt beider Kurven auf die z-Achse fällt. Die Gleichungen der beiden Kurven sehen dann so aus:

$$\begin{cases} y = a_2 x^2 + \dots, \\ z = f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = b_2 y^2 + \dots, \\ z = g(y) \end{cases}$$

und nun mache man die neue Transformation

$$y_1 = y - a_2 x^2 \dots,$$
$$x_1 = x - b_2 y^2 \dots.$$

Damit fallen die beiden Kurven in die beiden erwähnten Ebenen hinein. Nun kann man endlich noch durch eine Transformation von z allein erreichen, daß die beiden Kurven in die x- und in die y-Achse fallen. Wenn nämlich jetzt $z = f(x)$ und $z = g(y)$ die beiden Kurven sind und also $z(x, y)$ der Bedingung

$$z(0, 0) = z_0, \; z(0, y) = g(y), \; z(x, 0) = f(x)$$

genügt, so setze man

$$z_1 = z - f(x) - g(y) + z_0$$

und nun ist $z_1(0, y) = 0$, $z_1(x, 0) = 0$. Somit kann man sich beim Beweis auf den Fall beschränken, daß ein Integral der Differentialgleichung (5) durch die x- und die y-Achse hindurchgelegt werden soll. Es soll also $z_1(x, 0) = z_1(0, y) = 0$ sein. Nun aber war noch angenommen, daß die beiden gegebenen Kurven in ihrem Schnittpunkt Charakteristiken berühren. Somit muß die Gleichung (4), welche die Richtungen der Charakteristiken im Koordinatenanfangspunkt bestimmt, durch $x' = 0$ sowohl wie durch $y' = 0$ erfüllt sein. Wenn nun aber im Ursprung die Integralfläche durch die beiden Koordinatenachsen hindurchgehen soll, so muß die x-y-Ebene dort ihre Tangentialebene sein, also ist im Ursprung $p = q = 0$. Das erkennt man ja auch durch Differentiation von $z(x, 0)$ bzw. $z(0, y)$.

Daraus folgt noch, daß im Ursprung auch $r = t = 0$ sein muß. Soll nun also (4) im Ursprung durch $x' = 0$ sowohl wie durch $y' = 0$ erfüllt sein, so muß im Ursprung $\mathsf{P} = 0$ und $\mathsf{T} = 0$ sein. Dabei sind diese Funktionen für die Werte $x = y = z = p = q = r = t = 0$ und für $s = f(0, 0, \ldots, 0)$ zu bilden. Da aber $\mathsf{P} = -\frac{\partial f}{\partial r}$ und $\mathsf{T} = -\frac{\partial f}{\partial t}$ ist, so muß in der Umgebung des Ursprungs die Differentialgleichung (5) so aussehen

$$s = a + bx + cy + dz + ep + fq + \ldots$$

Die Glieder r und t fehlen also, $a, b, c, \ldots$ sind Konstanten, und die nicht aufgeschriebenen sind alle vom zweiten oder höheren Grade. Nunmehr kann der Beweis durch die Majorantenmethode zu Ende geführt werden.

§ 3. *Monge-Ampère*sche Differentialgleichungen.

Das sind Differentialgleichungen von folgender Gestalt:

$$0 = A + Rr + Ss + Tt + E(rt - s^2). \tag{9}$$

Die Koeffizienten sind analytische Funktionen von x, y, z, p, q. Sie umfassen also namentlich auch die in den Ableitungen r, s, t linearen Differentialgleichungen, für die $E = 0$ ist. Einem wichtigen Sonderfall derselben werden wir uns bald des näheren zuwenden. Hier soll es sich um die Feststellung handeln, daß man in gewissen Fällen die Integration auf die von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen kann. Dies hängt mit Besonderheiten zusammen, welche die Charakteristiken der *Monge-Ampère*schen Gleichungen aufweisen. Man kann nämlich Streifen erster Ordnung angeben, welche Träger aller charakteristischen Streifen zweiter Ordnung sind. Für einen charakteristischen Streifen zweiter Ordnung müssen nämlich neben der partiellen Differentialgleichung (9) noch die beiden Gleichungen (3) sowie die Gleichung (4) gelten. Diese lautet hier so:

$$(R + Et)y'^2 - (S - 2Es)x'y' + (T + Er)x'^2 = 0. \tag{10}$$

Nun folgt aber aus (3), daß

$$ty'^2 + 2sx'y' + rx'^2 = x'p' + y'q'$$

ist. Daher kann man statt (10) auch schreiben

$$Ry'^2 - Sx'y' + Tx'^2 + E(x'p' + y'q') = 0. \tag{11}$$

Löst man endlich (3) nach r und t auf und trägt das Gefundene in (9) ein, so wird wegen (11) auch noch

$$Ax'y' + Rp'y' + Tq'x' + Ep'q' = 0. \tag{12}$$

Ein Streifen erster Ordnung nun, für welchen die beiden Gleichungen (11) und (12) gelten, soll ein charakteristischer Streifen erster Ord-

nung heißen. Aus der eben angestellten Betrachtung folgt, daß jeder charakteristische Streifen zweiter Ordnung einen solchen erster Ordnung enthält, oder mit anderen Worten, daß die 5 ersten Funktionen eines charakteristischen Streifens zweiter Ordnung einen charakteristischen Streifen erster Ordnung bestimmen. Umgekehrt kann man auch zeigen, daß unter der Zusatzannahme, daß $S^2 - 4RT + 4EA \neq 0$ ist, d. h. daß die beiden Scharen der Streifen zweiter Ordnung nicht zusammenfallen, jeder charakteristische Streifen erster Ordnung in einem charakteristischen Streifen zweiter Ordnung enthalten ist; diese hängen noch von einem Parameter ab. Doch will ich dem nicht weiter nachgehen. Die charakteristischen Streifen erster Ordnung müssen sich nun ebenso wie die Streifen zweiter Ordnung in zwei Scharen zerlegen lassen. Diese Zerlegung bewerkstelligt man leicht, wenn man von der Zerlegung der Streifen zweiter Ordnung in zwei Scharen ausgeht. Zu dem Zweck löse man die Gleichung (10) nach $y' : x'$ auf. Man findet wegen (9)

$$\frac{y'}{x'} = \frac{S - 2Es \pm \sqrt{S^2 - 4RT + 4EA}}{2(R + Et)} \tag{13}$$

als die beiden Wurzeln. Nennt man nun die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 + S\lambda + RT - EA = 0 \tag{13'}$$

λ_1 und λ_2, so kann man für (13) auch kurz schreiben

$$y'(R + Et) + Esx' + \lambda_1 x' = 0$$
$$y'(R + Et) + Esx' + \lambda_2 x' = 0.$$

Wegen (3) kann man dafür aber wieder schreiben

$$y'R + Eq' + \lambda_1 x' = 0 \tag{14a}$$

$$y'R + Eq' + \lambda_2 x' = 0. \tag{14b}$$

Verwendet man nun (14a) oder (14b) genau so wie vorhin (11), so findet man unter Berücksichtigung von (12), daß neben (14a) auch noch

$$x'T + Ep' + \lambda_2 y' = 0 \tag{15a}$$

gelten muß, und daß neben (14b) auch noch

$$x'T + Ep' + \lambda_1 y' = 0 \tag{15b}$$

sein muß. Damit sind nun die beiden Scharen der Charakteristiken erster Ordnung getrennt. Die eine Schar ist definiert durch (2), (14a), (15a), die andere durch (2), (14b), (15b).

Auf jeder Integralfläche von (9) liegen nun sowohl Charakteristiken der ersten wie der zweiten Art. Beide fallen übrigens für $\lambda_1 = \lambda_2$ zusammen.

An der Spitze der Integrationstheorie steht nun der *Satz, daß eine jede Fläche, welche aus solchen Charakteristiken erster Ordnung*

aufgebaut ist, eine Integralfläche von (9) *ist.* Ich will also annehmen, ein Flächenstück werde durch eine einparametrige Schar von Charakteristiken erster Ordnung lückenlos überdeckt, und zwar sei

$$x = x(u, v), \quad \ldots \qquad q = q(u, v)$$

eine Parameterdarstellung des Flächenstückes und seiner Ableitungen, wobei diese Funktionen analytische Funktionen und $v =$ konst. die Charakteristiken seien. Also gelten für jedes v längs eines Streifens der Fläche die Gleichungen

$$\begin{aligned} y' R + E q' + \lambda_1 x' &= 0 \\ E p' + y' \lambda_2 \qquad + T x' &= 0 \\ p' - y' s \qquad - r x' &= 0 \\ - y' t \quad + q' - s x' &= 0 . \end{aligned}$$

Dabei nehme ich also an, es läge gerade ein Streifen der ersten Sorte vor. Im anderen Falle schließt man ganz analog. Die beiden letzten Gleichungen bringen ja nur zum Ausdruck, daß ein Streifen auf einer Fläche vorliegt. Faßt man die 4 Gleichungen als 4 lineare Gleichungen für x', y', p', q' auf und beachtet, daß längs eines Streifens einer Fläche $z = f(x, y)$ diese Funktionen nicht alle verschwinden können, so muß die Determinante des Gleichungssystemes Null sein. Das ist aber im Fall $E \neq 0$, in dem Falle also, wo (9) nichtlinear ist, bei Berücksichtigung von (13′) gerade (9). Ist aber (9) linear, so gilt der Schluß nicht. Will man auch in diesem somit hier unerledigten Fall einer in den Ableitungen linearen Differentialgleichung zu einer Charakteristikentheorie gelangen, so muß man wesentlich umständlicher verfahren. Man vgl. das Werk von *Goursat* über diesen Gegenstand.

Daß auch umgekehrt jede Integralfläche so entsteht, beruht auf der früher angeführten Bemerkung, daß eine jede Integralfläche von (9) aus charakteristischen Streifen zweiter Ordnung aufgebaut ist, in Verbindung mit der anderen Bemerkung, daß in jedem Streifen zweiter Ordnung einer der ersten enthalten ist.

Die ganze weitere Schwierigkeit der Integration liegt also jetzt darin, die Charakteristiken erster Ordnung zu bestimmen und aus ihnen Flächen aufzubauen. Diese Aufgabe erinnert an die analoge, welche wir bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bereits gelöst haben. Tatsächlich kann man nun unsere jetzige etwas kompliziertere Aufgabe auf die frühere zurückführen und damit gleichzeitig auch angeben, inwiefern die jetzige Aufgabe schwieriger ist als die frühere. Die Zurückführung gelingt dadurch, daß man partielle Differentialgleichungen erster Ordnung angibt, deren Charakteristiken sämtlich in einer der beiden Scharen unserer jetzigen Charakteristiken erster Ordnung enthalten sind. Sei also

$$V(x, y, z, p, q) = 0 \tag{16}$$

eine solche partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\partial V}{\partial p} \\ y' &= \frac{\partial V}{\partial q} \\ z' &= p\frac{\partial V}{\partial p} + q\frac{\partial V}{\partial q} \\ p' &= -\frac{\partial V}{\partial x} - p\frac{\partial V}{\partial z} \\ q' &= -\frac{\partial V}{\partial y} - q\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{17}$$

bestimmen ihre Charakteristiken. Die Frage lautet: wann sind mit diesen Gleichungen notwendig auch die drei Gleichungen (2), (14a), (15a) oder (2), (14b), (15b) einer unserer Scharen von Charakteristiken erster Ordnung der Gleichung (9) erfüllt? Tragen wir, um das zu erkennen, die Gleichungen (17) z. B. in die erste der beiden Gruppen, also in (2), (14a), (15a) ein, so ist (2) von selbst erfüllt, und die beiden anderen führen zu den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{T}{E}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\lambda_2}{E}\frac{\partial V}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda_1}{E}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{R}{E}\frac{\partial V}{\partial q} &= 0, \end{aligned} \tag{18a}$$

welchen V genügen muß. Aus der anderen Schar von Charakteristiken wären analog die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{T}{E}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\lambda_1}{E}\frac{\partial V}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda_2}{E}\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{R}{E}\frac{\partial V}{\partial q} &= 0 \end{aligned} \tag{18b}$$

gewonnen worden. *Wenn somit die Charakteristiken von* (16) *sämtlich in einer unserer beiden Scharen von Charakteristiken erster Ordnung enthalten sein sollen, so muß notwendig V entweder den beiden partiellen Differentialgleichungen* (18a) *oder den beiden* (18b) *genügen.* Diese notwendige Bedingung ist aber auch hinreichend. Nehmen wir also z. B. an, V genüge den beiden Gleichungen (18a), dann sind für die durch (17) bestimmten Charakteristiken von $V = 0$ notwendig auch die Gleichungen (2), (14a), (15a) erfüllt. Für (2) ist das wieder selbstverständlich, und die beiden anderen verifiziert man einfach durch Einsetzen von (17) in (14a) und (15a). Da nun aber nach S. 275 jede aus einer der beiden Charakteristikenscharen erster Ordnung aufgebaute Fläche eine Integralfläche von (9) ist, so können wir also unser Ergebnis nun auch so aussprechen: *Falls V einem der beiden*

Gleichungspaare (18a) *oder* (18b) *genügt, so ist jede Integralfläche von* (16) *auch Integralfläche von* (9). Wir nennen dann V ein erstes Integral von (9).

Man kann auch umgekehrt aus unseren Betrachtungen leicht den Schluß ziehen, daß die sämtlichen Integrale von (16) nur dann auch (9) genügen können, wenn V einem der beiden Gleichungspaare (18a) oder (18b) genügt. Je nach der Zahl von unabhängigen Integralen eines der beiden Paare linearer partieller Differentialgleichungen (18a) oder (18b), die man zu bestimmen in der Lage ist, wird man nun die Integration der Gleichung (9) mehr oder weniger vollständig beherrschen. Kennt man insbesondere zwei unabhängige Integrale eines der beiden Systeme (18a) oder (19b), V_1 und V_2, so genügt auch $V_1 - \varphi(V_2)$ dem gleichen System, wenn φ eine willkürliche Funktion ist. Dann ist neben $V_1 = 0$ und $V_2 = 0$ auch $V_1 - \varphi(V_2) = 0$ ein Integral von (9), d. h. jede Lösung von $V_1 - \varphi(V_2) = 0$ genügt auch (9). Dann ist also die Integration von (9) restlos erledigt.

Das für die Integration der Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer Unbekannten Erforderliche ist bereits auf S. 222 vorgebracht worden.

Es ist aber zu bemerken, daß die Zahl der überhaupt vorhandenen unabhängigen Integrale von vornherein feststeht. Sie ist von Fall zu Fall verschieden. Nach S. 220 genügt nämlich jedes Integral, das zwei linearen partiellen Differentialgleichungen $A(V) = 0$ und $B(V) = 0$ genügt, auch der Gleichung $[A, B] = 0$ und das kann eine neue, nicht von selbst erfüllte sein[1]).

Wir betrachten nun noch ein Beispiel aus der Flächentheorie, die auch das Hauptanwendungsgebiet dieser Theorien ist. Es handelt sich darum, die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen zu integrieren, also um den Nachweis, daß alle Flächen mit lauter parabolischen Punkten abwickelbar sind. Diese Aufgabe läuft auf die Integration der Differentialgleichung

$$rt - s^2 = 0 \tag{19}$$

hinaus. Die beiden Scharen von Charakteristiken erster Ordnung fallen hier zusammen. Denn die Gleichung (13′) wird hier $\lambda^2 = 0$ und ihre beiden Wurzeln sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Daher sind jetzt die Charakteristiken erster Ordnung aus den Gleichungen

$$q' = 0, \quad p' = 0, \qquad z' - px' - qy' = 0$$

zu bestimmen. Für die Integrale V ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

[1]) Der eben benutzte Klammerausdruck wurde S. 219 erklärt.

Wir erkennen sofort, daß $V_1 = p$, $V_2 = q$, $V_3 = z - px - qy$ drei Integrale sind. Also sind auch

$$q = f(p), \qquad z - px - qy = g(p)$$

Integrale von (19). Die zweite ist eine *Clairaut*sche Differentialgleichung, und deren Theorie lehrt, daß man alle Integrale derselben als Einhüllende der Ebenenschar

$$z - cx - w(c)y = g(c),$$

wo $w(c)$ eine willkürliche Funktion ist, erhält. Die Integralflächen sind also alle abwickelbare Flächen. Aber $z = cx + f(c)y + d$ ist auch ein vollständiges Integral der Gleichung $q = f(p)$, so daß diese auch nichts Neues mehr liefert.

§ 4. Lineare Differentialgleichungen.

Darunter versteht man wieder eine Differentialgleichung, welche die unbekannte Funktion z und ihre sämtlichen Ableitungen nur linear enthält. Sie ist also von der Form

$$a_0 r + a_1 s + a_2 t + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0. \tag{20}$$

Die Charakteristiken erfahren hier eine weitere Spezialisierung. Die Gleichung (4)

$$a_0 y'^2 - a_1 x' y' + a_2 x'^2 = 0 \tag{21}$$

nämlich, welche die Charakteristiken definierte, enthält jetzt nur noch x, y, legt also gewisse Kurven der x-y-Ebene fest, die wir jetzt kurz als Charakteristiken bezeichnen wollen. Wir werden dieselben jetzt nur dazu verwenden, um eine Einteilung der linearen Gleichungen anzugeben und um dieselben auf gewisse Normalformen zu transformieren. Dabei benutze ich die leicht zu verifizierende Tatsache, daß bei Koordinatentransformation Charakteristiken in Charakteristiken übergehen. Ich nehme zunächst an, die beiden Scharen von Charakteristiken fielen nicht zusammen. Dann kann ich dieselben als Koordinatenlinien nehmen und mir die Frage vorlegen, wie eine auf ihre Charakteristiken $x =$ konst. und $y =$ konst. als Koordinatenlinien bezogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aussieht. Soll aber die Gleichung (21) sowohl für $x' = 0$ wie für $y' = 0$ erfüllt sein, so muß $a_0 = 0$ und $a_2 = 0$ sein. Somit sieht die Gleichung dann so aus

$$a_1 s + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0. \tag{22}$$

Diese Normalform wollen wir nur beibehalten, wenn die Charakteristiken reell sind. Wir wollen dann sagen, die Gleichung sei vom *hyperbolischen* Typus und (22) sei eine Normalform derselben. Sind die Charakteristiken imaginär, so sagen wir, die Gleichung sei vom *elliptischen* Typus. Hier kommt man leicht zu einer reellen Normalform,

indem man verlangt, $x + iy = \text{konst.}$ und $x - iy = \text{konst.}$ sollten die Charakteristiken sein. Dann muß die Gleichung (21) so aussehen: $a(x'^2 + y'^2) = 0$, d. h. es muß $a_0 = a_2 = a$ und $a_1 = 0$ sein. Dann wird also

$$a(r + t) + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0$$

eine Normalform des elliptischen Typus. Auf ähnliche Weise kann man leicht eine weitere Normalform des hyperbolischen Typus bekommen. Man verlange, daß $x + y = \text{konst.}$ und $x - y = \text{konst.}$ die Charakteristiken seien. Dann muß (21) so aussehen: $a(x'^2 - y'^2) = 0$, d. h. es ist $a_0 = -a_2 = a$ und $a_1 = 0$. Also wird

$$a(r - t) + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0$$

eine weitere Normalform des hyperbolischen Typus.

Den noch übrigen Fall, wo die beiden Scharen von Charakteristiken zusammenfallen, nennt man den parabolischen Fall. Jetzt nehmen wir $x = \text{konst.}$ als Charakteristikenschar doppeltzählend. Dann muß sich (21) auf $a_2 x'^2 = 0$ reduzieren. Also wird

$$a_2 t + b_1 p + b_2 q + cz + d = 0$$

Normalform im *parabolischen Fall.*

II. Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen.

§ 1. Die *Laplace*sche Kaskadenmethode.

Ihr Ziel ist es, durch Quadraturen eine hyperbolische Differentialgleichung zu integrieren. Die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z + d(x, y) = 0$$

kann man leicht auf die Form bringen

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) - hz + d = 0.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$(3) \qquad h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$$

gesetzt. Man kann dafür auch schreiben

$$(4) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 - hz + d = 0,$$

indem man

$$(5) \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az$$

setzt. Ist dann $h = 0$, so ist offenbar (4) eine Gleichung für z_1 allein, die

man als gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung sofort integrieren kann. Hat man z_1 bestimmt, so erhält man aus (5) wieder ohne weiteres z.

Ist aber $h \neq 0$, so eliminiere man z aus (4) und (5), um eine Gleichung für z_1 allein zu erhalten. Sie ist wieder vom hyperbolischen Typus und kann ganz analog weiter behandelt werden. Wenn ihr h Null ist, kann sie durch Quadratur gelöst werden. Sonst führt der Ansatz auf eine neue Gleichung usw. Es werden aber nur vereinzelte Fälle sein, denen man so beikommen wird. Immerhin hat man noch einen zweiten analogen Prozeß zur Verfügung, indem man die Rollen von x und y vertauscht.

Ist z. B.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + e^x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1'}$$

vorgelegt, so wird $h = 0$. Man hat

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - z_1 = 0.$$

Also wird $z_1 = e^x \cdot \varphi(y)$, wo $\varphi(y)$ eine „willkürliche" Funktion von y ist. Demnach findet man für z die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} + e^x z = e^x \cdot \varphi(y).$$

Demnach wird

$$z = \exp(-ye^x) \cdot \{\psi(x) + e^x \int \varphi(y) \exp(ye^x)\, dy\}$$

mit einer zweiten willkürlichen Funktion $\psi(x)$ die allgemeinste Lösung von (1'). $\exp(x)$ bedeutet dabei wieder e^x.

§ 2. Die *Riemann*sche Integrationsmethode.

Ihr Ziel ist es, durch einen gegebenen Streifen erster Ordnung ein Integral von (1) zu legen. Dabei werde angenommen, daß dieser Streifen über keiner Charakteristik liegt. D. h. also: Es seien längs einer Kurve $\mathfrak{C}$, die weder der x-Achse noch der y-Achse parallel sein möge, die Werte von z, p, q vorgeschrieben, derart, daß die Streifenbedingung erfüllt ist. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß diese stetig differenzierbare Kurve von keiner Parallelen zu einer Koordinatenachse in mehr als einem Punkte getroffen werde. $\mathfrak{C}$ gehöre weiter einem Bereiche an, in welchem die Koeffizienten von (1) stetige Funktionen seien, und längs der Kurve seien auch z, p, q als stetige Funktionen vorgeschrieben.

Man kann z. B. den Ansatz so machen: Längs der Kurve sei $z = \varphi(x) + \psi(y)$, $p = \varphi'(x)$, $q = \psi'(y)$. Ein erstes Verfahren zur Lösung dieses Problemes wird durch die Methode der sukzessiven Approximationen geliefert, deren Ansatz wir hier nur kurz erläutern wollen, ohne die Konvergenzbetrachtung näher auszuführen. Zunächst

ist es leicht, die Gleichung $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} + d = 0$ unter der angegebenen Anfangsbedingung zu integrieren. Denn ihr genügt

$$z_0 = \varphi(x) + \psi(y) - \int\int d \cdot dx\, dy.$$

Dabei ist das Doppelintegral über den Bereich der Fig. 12 zu erstrecken.

Als nächsten Schritt integrieren wir

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z_0}{\partial x} + b\frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 = 0$$

mit der folgenden Anfangsbedingung: z_1 soll auf $\mathfrak{C}$ verschwinden. Ihre Lösung im Punkte (ξ, η) ist das über die Fläche der Fig. 12 erstreckte

$$-\int\int \left(a\frac{\partial z_0}{\partial x} + b\frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0\right) dx\, dy$$

usw. Dann läßt sich beweisen, daß die Reihe

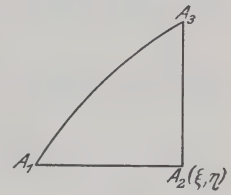

Fig. 12.

$$z_0 + z_1 + \cdots$$

gleichmäßig konvergiert und der gegebenen Gleichung (1) unter den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen genügt. Ich führe die Konvergenzbetrachtung nicht durch, weil wir schon mehrfach Gelegenheit hatten, solche Konvergenzbeweise unter ganz ähnlichen Umständen zu erbringen.

Die *Riemann*sche Integrationsmethode, der ich mich jetzt zuwende, gestattet es oft, ohne solche Reihenentwicklungen das Problem zu lösen. Ich knüpfe zunächst an die homogene Gleichung an. Ich nehme also in (1) $d = 0$ an, und will somit die Differentialgleichung

$$s + ap + bq + cz = 0 \tag{6}$$

behandeln. Die *Riemann*sche Integrationsmethode geht von der sogenannten *Green*schen Formel aus. Ich bezeichne den Differentialausdruck auf der linken Seite von (6) abkürzend mit $\mathfrak{L}(z)$. Versucht man dann partielle Integration auf $\int\int v\,\mathfrak{L}(u)\, dx\, dy$ anzuwenden, so wird man ganz von selbst auf die *Green*sche Formel geführt:

$$\int\int (v\,\mathfrak{L}(u) - u\,\mathfrak{M}(v))\, dx\, dy = \int (P\, dy - Q\, dx) \tag{7}$$

Hier ist das Doppelintegral über einen Bereich, in dem die Koeffizienten und die Funktionen u und v mit den vorkommenden Ableitungen stetig sind, zu erstrecken. Es ist $\mathfrak{M}$ der adjungierte Differentialausdruck

$$\mathfrak{M}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv$$

und es ist

$$P = \frac{1}{2}\frac{\partial (uv)}{\partial y} - u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)$$

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\partial (uv)}{\partial x} - u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right).$$

Das Kurvenintegral ist über den Bereichrand zu erstrecken, so daß das Innere zur Linken bleibt. Wir werden die Formel hernach ausschließlich auf einen Bereich (Fig. 12) anwenden, der einesteils von einem Bogen der Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt ist, auf dem die Anfangsbedingungen für u vorgeschrieben sind, und von zwei Charakteristiken durch einen Punkt (ξ, η), in welchem wir die Lösung u zu berechnen wünschen. Für u wähle ich also die gesuchte Lösung von $\mathfrak{L}(u) = 0$ und für v wähle ich eine noch näher zu bestimmende Lösung von $\mathfrak{M}(v) = 0$. Dann ist also

$$\int (P\,dy - Q\,dx) = 0\,,$$

mit anderen Worten ist also nach Fig. 12

$$\int_{A_2}^{A_3} P\,dy - \int_{A_1}^{A_2} Q\,dx + \int_{A_3}^{A_1} (P\,dy - Q\,dx) = 0$$

oder

$$(uv)_{A_2} = \tfrac{1}{2}(uv)_{A_1} + \tfrac{1}{2}(uv)_{A_3} - \int_{A_2}^{A_3} u\,(v_y - a\,v)\,dy + \int_{A_1}^{A_2} u\,(v_x - b\,v)\,dx + \int_{A_3}^{A_1} (P\,dy - Q\,dx)\ .$$

Nun wähle ich insbesondere v so, daß auf A_2A_3

$$v_y - a\,v = 0$$

und daß auf A_1A_2:

$$v_x - b\,v = 0$$

ist. Das ist also gleichbedeutend damit, zu fordern: Auf A_2A_3 sei $v = \exp\left(\int_{\eta}^{y} a\,(\xi, y)\,dy\right)$ auf A_1A_2 sei $v = \exp\left(\int_{\xi}^{x} b\,(x, \eta)\,dx\right)$[1]. Ob es solche Integrale von $\mathfrak{M}(v) = 0$ stets gibt, bleibt noch zu untersuchen, ist aber schon auf S. 271/272 gelegentlich erwähnt worden. Somit wird schließlich[2])

$$u\,(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(uv)_{A_1} + \tfrac{1}{2}(uv)_{A_3} + \int_{A_3}^{A_1} (P\,dy - Q\,dx)\,.$$

Daß die so gefundene Lösung wirklich den Anfangsbedingungen und der Gleichung genügt, bedarf keiner näheren Erörterung, weil wir ja gerade vorher sahen, daß man mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen den Existenzbeweis der Lösung erbringen kann. Die jetzige Betrachtung fügt den Nachweis hinzu, daß es nur eine solche Lösung gibt. Denn jede muß durch die gefundene Formel dargestellt werden. Übrigens könnte man auch unschwer direkt an der gefundenen Formel verifizieren, daß sie die gestellte Aufgabe löst.

---

[1]) Vgl. die Erklärung dieses Zeichens auf S. 280.

[2]) Im Punkte A_2 ist nämlich $v\,(\xi, \eta) = 1$.

Als wünschenswert bleibt nur noch die Klärung der Frage, ob es eine Lösung von $\mathfrak{M}(v) = 0$ gibt, die auf zwei Charakteristiken gegebene Werte hat. Diese Frage soll am Ende dieses Paragraphen erledigt werden. Hier mögen nur noch ein paar Bemerkungen Platz greifen.

Zunächst die Bemerkung, daß unsere Methode auch die Lösung der inhomogenen Gleichung unter den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen gestattet. Man trage eben nur für u die betreffende Lösung ein, und findet dann durch die gleiche Betrachtung diese Lösung von (1)

$$u(\xi, \eta) = \tfrac{1}{2}(uv)_{A_1} + \tfrac{1}{2}(uv)_{A_3} + \int_{A_3}^{A_1} (P\,dy - Q\,dx) + \iint v d \cdot dx\,dy .$$

Unschwer kann man übrigens ganz analoge Formeln auch für die andere hyperbolische Normalform gewinnen. Es sei also jetzt

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu . \tag{8}$$

Dann hat man

$$\mathfrak{M}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv$$

$$P = \frac{\partial (uv)}{\partial x} - 2u\left(v_x - \frac{1}{2}av\right)$$

$$Q = \frac{\partial (uv)}{\partial y} - 2u\left(v_y - \frac{1}{2}bv\right)$$

und die *Green*sche Formel (7).

Mit ihr verfährt man genau wie eben und erhält schließlich als Lösung von $\mathfrak{L}(u) = 0$ diesen Ausdruck

$$u(\xi, \eta) = \frac{(uv)_{A_1} + (uv)_{A_3}}{2} + \frac{1}{2}\int_{A_1}^{A_3} (P\,dy - Q\,dx).$$

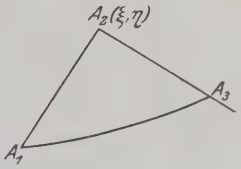

Fig. 13.

An Stelle der Fig. 12 tritt jetzt die Fig. 13, wo die Geraden wieder Charakteristiken sind. v ist wieder bestimmt durch die Forderung

$$\mathfrak{M}(v) = 0 \quad \text{und} \quad v = \exp\left(\int_{\xi}^{x} \frac{a(x, \eta + x - \xi)}{2}\,dx\right) \text{ auf } (A_1 A_2)$$

$$v = \exp\left(\int_{\eta}^{y} \frac{b(\xi + y - \eta, y)}{2}\,dx\right) \text{ auf } (A_2 A_3).$$

Zum Schluß dieses Paragraphen möge noch angegeben werden, wie man mit Hilfe der sukzessiven Approximationen das neue Anfangswertproblem löst, auf das wir bei der *Riemann*schen Methode gestoßen sind. Es soll sich also um die Aufgabe handeln, die

Gleichung (6) unter den Anfangsbedingungen $z = f(x)$ für $y = y_0$ und $z = \varphi(y)$ für $x = x_0$ zu lösen. Dabei sollen diese Bedingungen auf gewissen von (x_0, y_0) ausgehenden Strecken der Geraden $x = x_0$ und $y = y_0$ erfüllt sein. Diese sollen in die Richtung der wachsenden x bzw. y weisen und einem Bereiche angehören, in dem die Koeffizienten der Gleichung stetig sind. Damit im Punkte (x_0, y_0) die Stetigkeit keine Unterbrechung erleidet, soll noch vorausgesetzt werden, daß $f(x_0) = \varphi(y_0)$ ist. Dann ist jedenfalls $z_0 = f(x) + \varphi(y) - f(x_0)$ eine Funktion, welche die Anfangsbedingungen erfüllt. Sie genügt der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\, \partial y} = 0$. Alsdann bestimme man z_1 aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 = 0,$$

so daß es auf $x = x_0$ und auf $y = y_0$ verschwindet, setze also

$$z_1 = -\int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} (a z_{0x} + b z_{0y} + c z_0)\, dx \cdot dy.$$

Alsdann bestimme man analog z_2 und allgemein werde z_n aus

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1} = 0 \tag{9}$$

so bestimmt, daß es auf $x = x_0$ und auf $y = y_0$ verschwindet. Dann ist

$$z = z_0 + z_1 + \cdots$$

die gewünschte Lösung von (6). Dies ist bewiesen, sowie nur erkannt ist, daß diese Reihe samt den Reihen ihrer ersten Ableitungen gleichmäßig konvergiert. Es gilt doch für eine jede Teilsumme $s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$

$$s_n = z_0 - \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \left(a \frac{\partial s_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial s_{n-1}}{\partial y} + c s_{n-1} \right) dx\, dy$$

und daraus folgt durch Grenzübergang zu $n \longrightarrow \infty$

$$z = z_0 - \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z \right) dx\, dy$$

und daraus durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0.$$

Auf den Konvergenzbeweis selbst will ich nicht näher eingehen. Auch er unterscheidet sich nicht von den Betrachtungen, die wir früher zu gleichem Zweck angestellt haben.

Der eben besprochene Ansatz ist auf die homogene Gleichung besonders zugeschnitten. Man kann ihn aber durch geringe Abänderung so einrichten, daß er für die inhomogene Gleichung (1)

und für noch allgemeinere Gleichungen zum Ziel führt. Man gehe nur dazu von der gleichen ersten Näherung z_0 aus wie eben, bestimme auch jetzt wieder rekurrent die n-te Näherung aus der n—1-ten durch die Gleichung

$$\frac{\partial z_n}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c\,z_{n-1} + d = 0,$$

indessen so, daß sie auf $x = x_0$ und auf $y = y_0$ die verlangten Anfangsbedingungen besitzt. Man hat also

$$z_n = z_0 - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c\,z_{n-1} + d\right)dx\,dy \tag{10}$$

zu setzen. Jetzt wird die gesuchte Lösung nicht mehr die Summe der z_n, sondern vielmehr der Grenzwert der z_n oder, anders ausgedrückt, die Summe der Reihe

$$z = z_0 + (z_1 - z_0) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) + \cdots$$

Denn es ist ja durch Grenzübergang $n \to \infty$ aus (10) zu finden

$$z = z_0 - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(a\,z_x + b\,z_y + cz + d)\,dx\,dy$$

und daraus durch Differentiation alles Gewünschte.

Dieser Ansatz nun ist es, der auch für allgemeinere Gleichungen wie z. B. die in der Flächentheorie wichtige

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \sin z \tag{11}$$

zur Lösung des gleichen Problemes führt.

Ein Wort ist nur noch darüber zu sagen, daß die Lösungen durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt sind. Man kann sie im Rahmen der Methode der sukzessiven Approximationen durch die gleichen Überlegungen gewinnen, die zum Konvergenzbeweis führen. Wenn nämlich z eine beliebige, den Anfangsbedingungen genügende Lösung z. B. von (11) ist, so ist jedenfalls

$$z = z_0 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\sin z\,dx\,dy,$$

wo wieder $z_0 = f(x) + \varphi(y) - f(x_0)$ sei. Ferner gilt auch für die n-te Näherung

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\sin z_{n-1}\,dx\,dy,$$

also haben wir

$$z - z_n = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(\sin z - \sin z_{n-1})\,dx\,dy.$$

Nun ist

$$|z - z_0| = |\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \sin z \, dx\, dy| < |x - x_0|\,|y - y_0|$$

$$|z - z_1| = |\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} (\sin z - \sin z_0)\, dx\, dy|$$

$$= |\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} 2 \sin\frac{z - z_0}{2} \cos\frac{z + z_0}{2} dx\, dy|$$

$$< |\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} |x - x_0|\,|y - y_0|\, dx\, dy| = \frac{|x - x_0|^2\,|y - y_0|^2}{2^2}.$$

Daraus gewinnt man durch vollständige Induktion

$$|z - z_n| < \frac{|x - x_0|^{n+1}\,|y - y_0|^{n+1}}{[(n+1)!]^2},$$

so daß es also nur eine Lösung gibt, weil hiernach $z_n \longrightarrow z$ strebt. Ähnlich schließt man auch in anderen Fällen.

§ 3. Die Differentialgleichung der schwingenden Saite.

Die freien Schwingungen einer längs der x-Achse ausgespannten Saite werden durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \tag{12}$$

beschrieben. t bedeutet darin die Zeit, z die Entfernung von der geradlinigen Gleichgewichtslage. In $a^2 = \frac{S}{\varrho}$ bedeutet S die Spannung, ϱ die Masse der Längeneinheit, so daß also in dem von uns allein zu betrachtenden Fall der homogenen Saite a^2 eine positive Konstante ist. Die Charakteristiken sind in diesem Falle $x + at = \text{konst.}$ und $x - at = \text{konst.}$ Das bedingt einen geringen Unterschied gegenüber den bisher betrachteten Fällen. Man überträgt aber auch auf ihn ohne sonderliche Schwierigkeit die angestellten Betrachtungen.

Wir betrachten nun eine an ihren beiden Enden bei $x = 0$ und bei $x = l$ eingeklemmte Saite. Es soll also für alle t: $z(0, t) = 0$ und $z(l, t) = 0$ sein. Ferner ist die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit der Saite gegeben. D. h. für $t = 0$ soll $z(x, 0) = f(x)$ und $\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = F(x)$ sein. Zunächst kann man die *Riemann*sche Methode anwenden, um in einem beliebigen Punkte (x, t) des in Fig. 14 schraffierten Bereiches die Lösung zu berechnen. Dieser Bereich ist nämlich seitlich von den beiden durch die Saitenenden gehenden Charakteristiken begrenzt. In einem inneren Punkt ist nach dem *Riemann*schen Verfahren die Lösung durch $f(x)$ und $F(x)$ allein

bestimmt. Man findet nämlich in dem Punkte (x, t), dessen Charakteristiken $t = 0$ in $\alpha = x - at$ und $\beta = x + at$ treffen mögen

$$(13) \quad z(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\xi)\,d\xi .$$

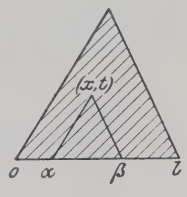

Fig. 14.

Damit ist das Problem nun erst für gewisse x und t gelöst und es gilt nun, unter Berücksichtigung der an den Saitenenden vorgeschriebenen Bedingungen den Bewegungsverlauf auch für andere Zeiten zu bestimmen. Dies erzwingt man nach *Riemann* durch einen Kunstgriff. Daß nämlich die *Riemann*sche Methode nicht zur Berechnung der Lösung in einem größeren Bereiche brauchbar ist, liegt darin begründet, daß $f(x)$ und $F(x)$ nur für $0 \leqq x \leqq l$ gegeben sind. Man erklärt nun in einer zweckmäßigen Weise diese Funktionen über dies Intervall hinaus, so daß die zugehörigen Lösungen bei $x = 0$ und bei $x = l$ für alle Zeiten verschwinden. Zu dem Zweck setze man fest

$$f(-x) = -f(x) \qquad f(x+2l) = f(x)$$
$$F(-x) = -F(x) \qquad F(x+2l) = F(x).$$

Damit sind dann die beiden Funktionen für alle x erklärt, wenn man sie für $0 \leqq x \leqq l$ kennt. Die *Riemann*sche Lösung (13) verschwindet dann, wie man sich leicht überzeugt, tatsächlich bei $x = 0$ und bei $x = l$ für alle t. Ähnliche Überlegungen führen auch zur Beherrschung des Falles, wo an den Saitenenden ein anderer Bewegungszustand vorgeschrieben ist.

Ich will nun noch auf eine etwas andere Methode hinweisen. Das ist die Trennung der Variablen. Geht man nämlich mit dem Ansatz

$$z = u(x)\,v(t)$$

in die Gleichung der schwingenden Saite hinein, so geht diese in

$$\frac{1}{a^2}\frac{v''}{v} = \frac{u''}{u}$$

über. Da die rechte Seite nur von x, die linke nur von t abhängt, so müssen beide ein und derselben Konstanten: $-\lambda^2$ gleich sein. Also erhalten wir die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$u'' + \lambda^2 u = 0$$
$$v'' + \lambda^2 a^2 v = 0$$

und sind damit in der Lage, einige Lösungen der Gleichung zu bestimmen. Es sind die Lösungen

$$u = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$
$$v = d_1 \cos a\lambda t + d_2 \sin a\lambda t,$$

die man so erhält. Sollen dieselben aber bei $x = 0$ und bei $x = l$ verschwinden, so muß $c_1 = 0$ und $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ sein, und es bleiben nur diese Lösungen als brauchbar übrig:

$$\sin\frac{n\pi}{l}x\left(d_1\cos\frac{an\pi}{l}t + d_2\sin\frac{an\pi}{l}t\right).$$

Da nun aber die Gleichung (12) linear und homogen ist, so kann man durch Addition bekannter Lösungen neue finden, und somit sind auch die Summen

$$\sum_n \sin\frac{n\pi}{l}x\left(d_{1n}\cos\frac{an\pi}{l}t + d_{2n}\sin\frac{an\pi}{l}t\right)$$

Lösungen. Nunmehr ist man auch in der Lage, durch passende Bestimmung der Koeffizienten beliebige Anfangszustände der Lösung vorzuschreiben. Man wird nämlich durch die Anfangsbedingungen auf die beiden Gleichungen

$$f(x) = \sum d_{1n}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$F(x) = -\sum d_{2n}\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

geführt und steht so vor dem bekannten Problem aus der Theorie der *Fourier*schen Reihen. Freilich enthält dieser Gedankengang nur dann die volle Lösung des Problems, wenn diejenigen Reihen, welche aus den für $f(x)$ und $F(x)$ erhaltenen durch zweimalige Differentiation entstehen, selbst gleichmäßig konvergieren.

III. Kapitel.

Elliptische Differentialgleichungen.

Die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen ist viel komplizierter und gestaltenreicher als die der hyperbolischen. Es kann sich daher in dieser einführenden Darstellung nur darum handeln, einen Überblick über die Probleme und die Wege zu ihrer Lösung zu geben. Z. B. ist ja die Potentialtheorie weiter nichts als die Theorie der speziellen elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Es ist also auch nicht unsere Absicht, hier eine volle Potentialtheorie zu entwickeln. Vielmehr wollen wir, allerdings gerade an Hand dieser Differentialgleichung, nur einen Überblick zu gewinnen suchen. Diese Bevorzugung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ rechtfertigt sich auch dadurch, daß ja der Ausdruck einer jeden elliptischen Differentialgleichung in der Normalform mit Δu beginnt.

§ 1. Die *Green*sche Formel.

$u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien beide in einem gewissen Bereiche B zweimal stetig differenzierbar. Eine geschlossene abteilungsweise stetig differenzierbare Kurve besteht aus endlich vielen in Ecken zusammenstoßenden Bogen differenzierbarer Kurven. Sie sei frei von Selbstüberkreuzungen, gehöre dem Inneren von B an und begrenze einen Teil dieses Bereiches. Dann gewinnt man leicht durch partielle Integration die folgende *Green*sche Formel

$$\iint (u \Delta v - v \Delta u)\, dx\, dy = \int \{(u v_x - v u_x)\, dy - (u v_y - v u_y)\, dx\},$$

in welcher das Kurvenintegral so über den Rand zu erstrecken ist, daß dabei das Innere zur Linken bleibt, und wo das Doppelintegral über den von der Kurve umschlossenen Bereich zu nehmen ist.

Die Formel behält unverändert ihre Gültigkeit auch für mehrfach zusammenhängende Integrationsbereiche, die von mehreren Kurven begrenzt werden. Das Kurvenintegral ist dann eben nur über den vollen Rand zu erstrecken und zwar immer so, daß dabei das Innere zur Linken bleibt. Führt man in jedem Randpunkt zwei neue Koordinaten s und n ein, so daß die mit der Durchlaufungsrichtung gleichgerichtete Tangente s-Achse und die nach innen gerichtete Normale n-Achse wird, so ist im Punkte x_0, y_0:

$$x - x_0 = \cos(x\,s)\, s - \sin(x\,s)\, n$$
$$y - y_0 = \sin(x\,s)\, s + \cos(x\,s)\, n.$$

Somit ist

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n},$$

also ist

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Führt man also s als neue Integrationsvariable ein, so kann man die *Green*sche Formel auch so schreiben:

$$\iint (u \Delta v - v \Delta u)\, dx\, dy = \int \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) ds. \tag{1}$$

Trägt man in ihr für u eine beliebige Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ und $v = 1$ ein, so kommt

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0. \tag{2}$$

Eine weitere Anwendung ist diese: Man bestätigt leicht, daß

$$v_0 = \log \frac{1}{r}$$

eine Potentialfunktion ist, d. h. der Potentialgleichung

$$\Delta v_0 = 0$$

genügt. Dabei ist r die positive Entfernung des variablen Punktes x, y von einem festen Punkte ξ, η, also

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Diese Potentialfunktion $\log \frac{1}{r}$ ist nicht durchweg regulär. Sie weist vielmehr bei $(x, y) = (\xi, \eta)$ eine Unterbrechung der Stetigkeit auf. Für v will ich nun in (1)

$$v = \log \frac{1}{r} + v_1$$

eintragen, wo v_1 eine reguläre Potentialfunktion sein möge. Damit die Formel anwendbar wird, muß ich einen Bereich zugrunde legen, in welchem der Punkt (ξ, η) nicht enthalten ist. Einen solchen kann ich aus einem Bereich B, welcher ξ, η enthält, dadurch herstellen, daß ich aus ihm eine genügend kleine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt ξ, η weglasse, über deren Rand dann also auch das Kurvenintegral zu erstrecken ist. Somit folgt aus der *Green*schen Formel

$$\int_{\mathfrak{C}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{\mathfrak{k}} \left(v \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v}{\partial r} \right) ds = 0.$$

Dabei ist das erste Integral über den Rand $\mathfrak{C}$ des Bereiches B, das zweite über den Kreis zu erstrecken (Fig. 15). Das Kreisintegral ist aber

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \log \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial}{\partial r} \left(\log \frac{1}{r} \right) \right\} r \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \left\{ v_1 \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial v_1}{\partial r} \right\} r \, d\varphi.$$

Für $r \to 0$ ist $\log \frac{1}{r} \cdot r \to 0$. Daher wird dabei der erste Summand des ersten Integrales zu Null. Es ist aber $-r \frac{\partial}{\partial r} \log \left(\frac{1}{r} \right) \to 1$ für $r \to 0$ und daher wird bei diesem Grenzübergang der zweite Summand des ersten Integrales $2\pi u(\xi, \eta)$. Das letzte endlich wird für $r \to 0$ wieder Null. Da dabei aber das über den Rand $\mathfrak{C}$ erstreckte Integral nicht beeinflußt wird, so kommt heraus

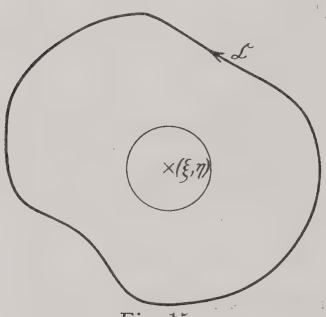

Fig. 15.

$$(3) \quad u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Somit sind wir in der Lage, eine Potentialfunktion im Inneren eines Bereiches durch ihre Werte und die Werte ihrer Ableitungen am Rande des Bereiches wirklich darzustellen und wir sind im Einklang mit dem Satze von S. 267, wonach die Lösung durch einen Streifen bestimmt

sein muß. Die Funktion ist, wie wir wenigstens für analytische Streifen noch von damals wissen, durch diesen Streifen eindeutig bestimmt. Das hat aber hier zur Folge, daß man den Randstreifen einer Potentialfunktion, welche im Inneren von B regulär sein soll, nicht beliebig vorschreiben kann. Denn auch die Funktion $\log\frac{1}{r}$ mit Unstetigkeitspunkt im Bereichinneren ist ja durch ihren Randstreifen bestimmt. Zu diesem gehört also keine im Inneren des Bereiches reguläre Potentialfunktion. Es erhebt sich also die *Frage, zu welchen Randstreifen Potentialfunktionen gehören, welche im ganzen Bereichinneren regulär sind.* Die Antwort auf diese Frage gewinnt man durch weitere Spezialisierung der Funktion v, die bisher bis auf ihre logarithmische Unstetigkeit ganz willkürlich war. Wäre es möglich, sie so einzurichten, daß sie am Rande verschwindet, so würde sich die Formel

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{S}} u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds \tag{4}$$

ergeben, und wir hätten den *Satz, daß eine in B reguläre Potentialfunktion durch ihre Randwerte bestimmt ist.* Eine solche Funktion v wollen wir als *Green*sche *Funktion* des Bereiches bezeichnen. Wir schreiben

$$v = G(x, y, \xi, \eta),$$

um auch ihren Aufpunkt (ξ, η) kenntlich zu machen. Dort wird sie also unendlich wie $\log\frac{1}{r}$, und am Rande verschwindet sie. Die Frage ist aber nun, ob eine solche *Green*sche Funktion stets existiert. Vor der allgemeinen Erörterung dieser Frage weise ich auf einen besonderen Fall hin. Es sei z. B. ξ, η der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius R. Dann kann man

$$v = \log\frac{R}{r} \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

nehmen. Dann wird $\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial r} = +\frac{1}{r}$ (weil n die *innere* Normale ist). Wir haben somit für den Wert einer Potentialfunktion im Mittelpunkt eines Kreises diesen Ausdruck durch die Randwerte

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\,d\varphi. \tag{5}$$

Der Wert im Mittelpunkt kann somit als arithmetisches Mittel der Randwerte angesprochen werden. Er ist somit stets kleiner als der größte Randwert und diesem nur dann gleich, wenn die Funktion am Rande konstant ist. Schon diese Bemerkung genügt nun aber, um tatsächlich zu beweisen, daß eine in einem Bereiche B reguläre

Potentialfunktion durch ihre Randwerte bestimmt ist. Denn wenn u_1 und u_2 zwei in B reguläre Potentialfunktionen gleicher Randwerte sind, so ist auch $u_1 - u_2$ eine Potentialfunktion, welche am Rande des Bereiches verschwindet. Wäre sie nun nicht im Bereiche überall Null, so müßte sie darin ein Maximum oder ein Minimum haben und es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß es ein positives Maximum sei. Alsdann schlage man um eine Stelle, wo die Funktion diesem Maximum gleich ist, einen dem Bereiche angehörigen Kreis. Da sie im Mittelpunkt dem arithmetischen Mittel der Randwerte gleich ist, ihren größten Wert aber daselbst annimmt, so muß sie am Rande überall diesem größten Werte gleich sein. Da dies für jeden Kreis um den Maximumpunkt gilt, so ist sie im größten um diesen in B schlagbaren Kreis konstant. Durch Heranziehung weiterer Kreisscheiben schließt man hieraus leicht, daß die Funktion im ganzen Bereiche konstant sein muß. Da sie aber am Rande verschwindet, so muß sie auch im Inneren verschwinden. Eine im Bereiche B reguläre Potentialfunktion ist also durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt. Die gleiche Schlußweise führt auch zu dem allgemeinen Satz, *daß keine nichtkonstante Potentialfunktion im Inneren eines Regularitätsbereiches ihren größten oder kleinsten Wert annimmt.*

Zur Entscheidung der Frage, ob eine Potentialfunktion durch ihre Randwerte bestimmt ist, haben wir also die *Green*sche Funktion in ihrer Allgemeinheit nicht mehr nötig. Sie kann nun nur noch dazu dienen, die Funktion in ihrer Bestimmtheit durch die Randwerte wirklich aufzuschreiben. Dabei erhebt sich aber dann die weitere Frage, ob etwa diese Randwerte willkürlich vorgeschrieben werden können, ob es also Potentialfunktionen gibt, die in B regulär sind, und die am Rande von B gegebene Werte haben.

§ 2. Die erste Randwertaufgabe beim Kreis.

Die eben formulierte Aufgabe nennt man die *erste Randwertaufgabe.* Sie entspricht der ersten Randwertaufgabe, mit der wir uns schon bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen befaßt haben. Damals waren bei der ersten Randwertaufgabe die Werte der Funktion an den Rändern (Enden) eines Intervalles gegeben. Bei anderen Randwertaufgaben kamen auch noch die Randwerte der Ableitungen vor. Solche Probleme haben auch hier ihre Analoga.

Am einfachsten gelingt nun die Lösung der ersten Randwertaufgabe im Falle des Kreises. Ich wähle den Kreis $|z| < R$ der z-Ebene und befasse mich zunächst mit der Konstruktion der *Green*schen Funktion. Man wird am leichtesten durch die folgende heuristische Betrachtung daraufgeführt: Es ist aus der Funktionentheorie geläufig, daß jede zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion Realteil einer bis auf

eine rein imaginäre additive Konstante bestimmten analytischen Funktion einer komplexen Variablen $z = x + iy$ ist[1]). So gibt es auch zur *Green*schen Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$ eine konjugierte Potentialfunktion $H(x, y, \xi, \eta)$, so daß $G + iH (= f(z))$ eine analytische Funktion ist. Auch $e^{-f(z)} = \varphi(z)$ ist eine analytische Funktion und dann ist $G = -\log|\varphi(z)|$. Somit ist $\varphi(z)$ eine im Kreise analytische Funktion, welche an seinem Rande den konstanten absoluten Betrag Eins hat und welche im Punkte $\zeta = \xi + i\eta$ desselben verschwindet. Sie hat dort zudem eine einfache Nullstelle und hat keine anderen Nullstellen im Bereiche. Die Funktion $w = \varphi(z)$ leistet somit eine schlichte Abbildung des Kreises auf den Kreis $|w| < 1$. Daher muß $\varphi(z)$ eine lineare Funktion sein, und zwar ist $\varphi(z) = \frac{R(z-\zeta)}{R^2 - \bar{\zeta} z}$ die gewünschte lineare Funktion. Sie ist nicht die einzige, die unseren Zwecken genügt. Man erhält andere, wenn man die angegebene mit einer Zahl vom Betrage Eins multipliziert. Aber diese führen natürlich zu derselben *Green*schen Funktion. Für diese findet man somit die Darstellung

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\log \frac{|z-\zeta| \cdot R}{|z-\zeta_1| \cdot |\zeta|} \left(\zeta_1 = \frac{R^2}{\bar{\zeta}}\right). \tag{6}$$

Man verifiziert leicht, daß die auf diesem heuristischen Wege gefundene, durch (6) dargestellte Funktion wirklich alle Eigenschaften der *Green*schen Funktion besitzt. Die Nachprüfung sei dem Leser überlassen. Zur Lösung der ersten Randwertaufgabe durch die Formel (4) benötigen wir nun noch die Ableitung der *Green*schen Funktion nach der nach innen gerichteten Normalen.

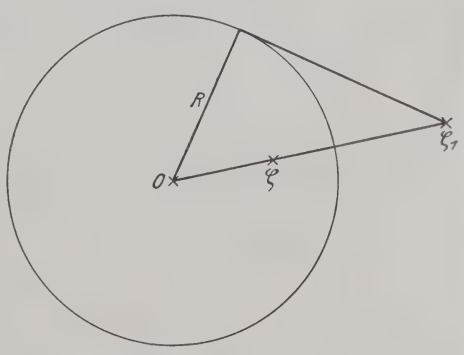

Fig. 16.

Setzt man $z = re^{i\varphi}$, so ist $\frac{\partial G}{\partial n}$ weiter nichts als die negative Ableitung von G nach r gebildet für $r = R$. Da liefert aber leichte Rechnung das Ergebnis

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{R^2 - |\zeta|^2}{R|z-\zeta|^2}. \tag{7}$$

Setzt man noch $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$, so kann man nach dem Kosinussatz der Trigonometrie auch schreiben:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{R^2 - \varrho^2}{R(R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos(\vartheta - \varphi))}$$

[1]) Sie ist somit beliebig oft stetig differenzierbar.

und somit wird die erste Randwertaufgabe durch das folgende *Poisson*sche Integral gelöst:

$$(8) \qquad u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \varrho^2)\, u(R, \varphi)}{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos(\vartheta - \varphi)}\, d\varphi.$$

Freilich ist diese Formel nun nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß es eine reguläre Potentialfunktion gibt, welche die gegebenen Randwerte besitzt. Aber man kann nun nachträglich unter ziemlich allgemeinen Annahmen über die Randwerte zeigen, daß das *Poisson*sche Integral eine Potentialfunktion darstellt, welche die gegebenen Randwerte besitzt. Dazu würde z. B. die Annahme ausreichen, daß die Randwerte abteilungsweise stetig sind. Ich ziehe es indessen vor, auf einem etwas anderen Wege die Existenz einer Potentialfunktion mit gegebenen Randwerten nachzuweisen. Ich betrachte dazu eine analytische Funktion, deren Realteil die gesuchte Potentialfunktion mit den gegebenen Randwerten sein soll. Da diese analytische Funktion nun im Kreise regulär ist, so kann man sie in eine in diesem Kreise reguläre Potenzreihe entwickeln. Dann hat man also eine Potenzreihe dieser Form

$$(9) \qquad \sum a_n z^n \qquad (a_n = a_n' + i\, a_n'').$$

Ihr Realteil ist die gesuchte Potentialfunktion. Für diese hat man also die Reihe

$$(10) \qquad \sum r^n (a_n' \cos n\varphi - a_n'' \sin n\varphi).$$

Für $r = R$ ist dies eine trigonometrische Reihe, welche die gegebenen Randwerte darstellt, falls sie da noch konvergiert. Es ist auch leicht zu sehen, daß jede Reihe (10) in ihrem Konvergenzkreis eine Potentialfunktion darstellt. Ohne weiteres leuchtet das in dem Falle ein, wo auch die konjugierte Reihe

$$(11) \qquad \sum r^n (a_n' \sin n\varphi + a_n'' \cos n\varphi)$$

konvergiert. Dann ist nämlich die Summe beider die Potenzreihe (9), welche eine analytische Funktion darstellt, deren Realteil jene Reihe ist. Nur dieser Fall ist für das folgende nötig. Ich nehme nun an, die Randwerte seien so beschaffen, daß die sie darstellende *Fourier*sche Reihe (10) die nötigen Konvergenzeigenschaften hat. Das ist z. B. dann der Fall, wenn die Randwerte als Funktion von φ mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig sind. Alsdann folgt aus der Integraldarstellung der Koeffizienten, daß ihre Summe wie $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Und daraus ergibt sich, daß auch die konjugierte Reihe und damit die Potenzreihe am Rande konvergiert. Aus dem *Abelschen Grenzwertsatz*[1]) folgt alsdann, daß bei Annäherung an den

[1]) Vgl. z. B. mein Lehrbuch der Funktionentheorie I, S. 27. Der Satz lautet: Wenn $f(z) = \sum_n a_n z^n$ bei $z = z_0$ konvergiert, so ist $\lim_{z \to z_0} f(z) = \sum a_n z_0^n$.

Rand die Potenzreihe den durch die Randreihe dargestellten Werten zustrebt. Daher strebt auch die Reihe, welche die Potentialfunktion darstellt, bei Annäherung an den Rand den gegebenen Randwerten zu, und die Randwertaufgabe ist für diesen allerdings ziemlich speziellen Fall gelöst. Dieser Weg ist mancherlei Verallgemeinerungen fähig. Ich will aber diesen Betrachtungen nicht nachgehen, sondern nur noch das weitestgehende Resultat erwähnen, über das man heute verfügt: *Wenn die Randwerte durch irgendeine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion gegeben sind, so stellt das Poissonsche Integral im Kreisinneren eine reguläre Potentialfunktion dar, welche bei radialer Annäherung an einen, nicht einer gewissen Ausnahmemenge vom Maß Null angehörigen Randpunkt den gegebenen Randwerten zustrebt.*

Soviel über die Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Kreis. Nun ist leicht zu sehen, daß damit die erste Randwertaufgabe auch für alle diejenigen einfachzusammenhängenden Bereiche gelöst ist, die man auf die Fläche eines Kreises so konform abbilden kann, daß dabei die Stetigkeit der Abbildung am Rande gewahrt bleibt. Denn wenn $w = f(z)$ diejenige analytische Funktion ist, welche den Bereich so auf $|w| < 1$ abbildet, daß dabei der Aufpunkt ζ in $w = 0$ übergeht, so ist $-\log|f(z)|$ die *Green*sche Funktion des Bereiches, und man kann eine dem *Poisson*schen Integral ähnliche Formel ansetzen.

Man kann aber auch die Lösbarkeit der Randwertaufgabe sofort so erschließen. Durch die Abbildung $w = f(z)$ geht der Rand des Bereiches in stetiger Weise in die Peripherie des Kreises über. Die am Rande des Bereiches vorgeschriebenen Randwerte gehen somit in bestimmte Werte am Rande des Kreises über. Man löse mit diesen Randwerten die Randwertaufgabe für den Kreis. Diese Potentialfunktion ist Realteil einer analytischen Funktion $\varphi(w)$. Dann ist $\varphi\{f(z)\}$ eine im Bereiche analytische Funktion, deren Realteil eine Potentialfunktion ist, welche die gegebenen Randwerte besitzt. Das ist ohne weiteres klar.

Da man nun aber heute aus der Theorie der konformen Abbildung weiß, daß man jeden von einer *Jordan*schen Kurve, d. h. einer stetigen Kurve ohne Selbstüberschneidungen begrenzten Bereich auf einen Kreis so konform abbilden kann, daß auch am Rande noch die Stetigkeit der Abbildung gewahrt bleibt, so ist also auch für solche Bereiche die erste Randwertaufgabe lösbar, für Randwerte, welche den gleichen Bedingungen genügen, wie sie beim Kreise angegeben wurden.

Zur numerischen Behandlung der Randwertaufgabe bieten sich somit alle die Wege dar, welche zur numerischen Behandlung der konformen Abbildung herangezogen werden.

Bemerkungen. 1. Dem direkten Beweis, daß das *Poisson*sche Integral zum Beispiel für stetige Randwerte eine Potentialfunktion dieser Randwerte darstellt, liegen folgende Gedanken zugrunde. Zunächst ergibt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen, daß eine Potentialfunktion vorliegt. Daß sie aber die gegebenen Randwerte besitzt, zeigt sich so: Durch konforme Abbildung wird aus einer Potentialfunktion wieder eine Potentialfunktion. Soll man nun in einem Punkte P, der einem Peripheriepunkte nahe liegt, die Potentialfunktion berechnen, um zu erkennen, daß sie daselbst von dem vorgeschriebenen Randwerte nur wenig abweicht, so mache man eine konforme Abbildung des Kreises, die P in den Mittelpunkt überführt. Der Wert im Mittelpunkt wird dann das arithmetische Mittel der durch die Abbildung abgeänderten Randwerte. Bei dieser Abbildung geht nun aber ein gewisses Kreisbüschel in die Geraden durch den Mittelpunkt über. Es sind die Kreise, welche durch P gehen und die Peripherie senkrecht durchsetzen. Die Winkel, welche sie in P miteinander bilden, sind den Winkeln ihrer geradlinigen Bilder im Mittelpunkt gleich. Je näher nun P an der Peripherie liegt, um so größer ist der Winkelraum derjenigen Geraden, welche aus Kreisen hervorgehen, welche in der *Nähe* von P die Peripherie treffen. Die verpflanzten Randwerte werden also auf sehr großen Bogen der Peripherie nahezu dem Wert gleich sein welcher in dem P benachbarten Peripheriepunkt vorgeschrieben ist, und das arithmetische Mittel wird also auch diesem Werte um so mehr gleichkommen, je näher P an dem Rande liegt.

2. *H. A. Schwarz*, dem die Theorie der Potentialfunktionen so viel zu danken hat, hat als Erster die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für allgemeinere Klassen von Bereichen auf einem Wege erkannt, den wir noch kurz skizzieren wollen. Es ist die berühmte *Methode des alternierenden Verfahrens*. Sie ist auf Bereiche zugeschnitten, die man mit endlich vielen anderen dachziegelartig so bedecken kann, daß für jeden dieser Ziegel die Randwertaufgabe lösbar ist. Die Ziegel dürfen dabei nicht über den Bereichrand hinübergreifen. Die Methode ist also z. B. anwendbar, wenn der Rand aus endlich vielen Bogen analytischer Kurven besteht. Denn eine analytische Kurve ist dadurch definiert, daß man sie durch eine in ihrer Umgebung analytische Funktion auf eine gerade Linie abbilden kann[1]). Dadurch geht aber auch ein gewisser an einem genügend kleinen Bogen derselben nach dem Bereichinneren zu gelegener Bereich in einen Halbkreis über, den man dann leicht auf einen Vollkreis abbilden kann. Nehmen wir also nun einen Bereich an, der von endlich vielen solcher Ziegel bedeckt ist. Dann ist offenbar nur zu zeigen, daß man auch für einen aus zwei solchen Ziegeln aufgebauten Bereich die Randwertaufgabe lösen kann. Und da setzt nun das geistreiche alternierende Verfahren ein. In Fig. 17 sind zwei solche Dachziegel gezeichnet. Wir sehen vier Kurvenstücke. Auf L_1 und L_4 sind Randwerte gegeben, zu denen eine im großen Bereich reguläre Potentialfunktion konstruiert werden soll. Man gebe zunächst auf L_3 irgendwelche Randwerte vor, so daß dann auf L_1+L_3 eine stetige Randfunktion des linken Ziegels gegeben ist. Man bestimme die in diesem Ziegel reguläre Funktion, welche die erwähnten Randwerte hat. Diese Funktion u_1 hat auf L_2 gewisse Werte, die die auf L_4

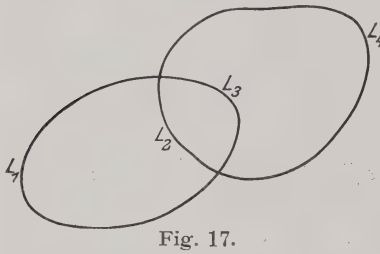

Fig. 17.

[1]) Ihre Koordinaten sind also analytische Funktionen eines reellen Parameters t.

schon gegebenen zu stetigen Randwerten am rechten Ziegel ergänzen. Mit diesen Randwerten löse man für den rechten Ziegel die Randwertaufgabe und erhält eine Funktion u_2, die wieder auf L_3 gewisse Werte hat, die die auf L_1 gegebenen zu Randwerten am linken Ziegel ergänzen. Mit diesen löse man wieder die Randwertaufgabe für den linken Ziegel und fahre so immer mit beiden Ziegeln abwechselnd fort. Dann konvergieren die so erhaltenen Potentialfunktionen in einem jeden Ziegel gegen eine Potentialfunktion, und beide Grenzfunktionen stimmen in dem beiden Ziegeln gemeinsamen Gebiete überein, so daß wir also eine im großen Bereich reguläre Potentialfunktion mit den gegebenen Randwerten erhalten haben.

3. Älter noch als diese Methode ist die Methode des *Dirichlet*schen Prinzips. Sie beruht auf der Betrachtung des Variationsproblems

$$D(u, u) \equiv \iint_B \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy = \text{Min.}$$

Die Aufgabe ist die: Man soll eine in einem Bereich B zweimal stetig differenzierbare Funktion finden, welche diesem Integral einen kleineren Wert erteilt als alle anderen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, welche am Rande von B dieselben Werte haben wie die gesuchte. Wenn es eine solche Lösung gibt, so schließt man ähnlich wie auf S. 125, daß die betreffende Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$ genügen muß. Es ist aber nicht von vornherein einleuchtend, daß es unter allen Funktionen gegebener Randwerte eine gibt, welche dem Integral einen kleineren Wert erteilt als die übrigen. Schlußmethoden, welche von der Evidenz dieser Tatsache ausgingen, wurden durch die Kritik von *Weierstraß* zu Fall gebracht. *Schwarz* ersann so als Ersatz seine Methode des alternierenden Verfahrens. Inzwischen aber ist es im Anschluß an *Hilbert* gelungen, den fehlenden Existenzbeweis nachzutragen. Es gibt somit unter allen in einem Bereiche zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit gegebenen Randwerten eine, welche dem *Dirichlet*schen Integral einen möglichst kleinen Wert erteilt. Das ist die Potentialfunktion, welche diese Randwerte besitzt. Auf den Beweis will ich nicht näher eingehen, zumal ja ein anderes Buch dieser Sammlung sich ausführlich mit diesen Dingen beschäftigt.

Sehr einfach ist es allerdings, einzusehen, daß eine am Rande reguläre Potentialfunktion dem *Dirichlet*schen Integral einen kleineren Wert erteilt, als jede andere reguläre Funktion gleicher Randwerte. Denn sei u eine Potentialfunktion und $u+v$ irgendeine andere reguläre Funktion gleicher Randwerte, also $v = 0$ am Rande, dann ist

$$D(u+v,\ u+v) = D(u, u) + 2\, D(u, v) + D(v, v)\,.$$

Hier ist

$$D(u, v) = \iint (u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y)\, dx\, dy$$

gesetzt. Nun aber ist

$$\frac{d}{d\varepsilon} D(u + \varepsilon v,\ u + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 = 2 \iint (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy\,.$$

Also ist

$$D(u+v,\ u+v) = D(u, u) + D(v, v) > D(u, u)\,.$$

4. Auf einem ganz anderen Wege hat kürzlich *Perron* die Randwertaufgabe gelöst (Math. Ztschr. 1923). Er gewinnt die Potentialfunktion einfach als untere Grenze derjenigen stetigen Funktionen, die am Rande zu große Werte annehmen und im Inneren der Ungleichung $\Delta u \leqq 0$ genügen.

Durch eine jede dieser Methoden erscheint nun auch die Existenz der *Green*schen Funktion von $\Delta u = 0$ sichergestellt. Denn nach ihrer auf S. 291 gegebenen Definition läuft ihre Bestimmung auf die Berechnung einer im Bereiche regulären Funktion hinaus, deren Randwerte die von $\log \frac{1}{r}$ zu Null ergänzen. Mit der Lösung der ersten Randwertaufgabe ist also auch die Existenz der *Green*schen Funktion gesichert. Sie spielt für die Gleichung $\Delta u = 0$ eine analoge Rolle, wie die früher eingeführte *Green*sche Funktion eines Randwertproblemes einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Eine Anwendung mag das noch erhärten. Es möge sich etwa darum handeln, diejenige Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\Delta u = f(x, y) \tag{12}$$

zu bestimmen, welche am Rande des Bereiches gegebene Werte besitzt. Zu dem Zweck bezeichne ich mit u_0 die Potentialfunktion, welche diese Randwerte besitzt, und setze $u = u_0 + u_1$. Dann genügt u_1 wieder der Differentialgleichung (12) und hat die Randwerte Null. Nur um die Bestimmung von u_1 handelt es sich also noch. Ich knüpfe an die *Green*sche Formel S. 289 an und setze darin für u die gesuchte Lösung u_1 von (12) ein, für v wahle ich die *Green*sche Funktion, die ich wieder in der Form $G = \log \frac{1}{r} + v_1$ schreibe. Dann muß man zunächst wieder um den Aufpunkt ξ, η der *Green*schen Funktion einen kleinen Kreis schlagen, sein Inneres vom Bereich weglassen, im Doppelintegral über diesen Restbereich und im Kurvenintegral über seinen vollen Rand integrieren. Das Kreisintegral wird ganz auf dieselbe Weise wie S. 290 berechnet, und man findet dafür den Wert

$$2\pi u_1(\xi, \eta).$$

Das Randintegral wird zu 0 und das Doppelintegral zu

$$-\iint G \cdot f \, dx \, dy,$$

und so hat man diese Darstellung der Lösung unserer Aufgabe

$$u_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \iint G(x, y, \xi, \eta) f(x, y) \, dx \, dy.$$

Sie ist abgeleitet unter der Voraussetzung, daß eine Lösung existiert. Man muß also nur noch hinterher verifizieren, daß u_1 der Differentialgleichung genügt. Das gelingt durch direktes Differenzieren, wie der Leser selbst nachprüfen möge.

§ 3. Die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$.

Wir legen uns für diese Differentialgleichung wieder die erste Randwertaufgabe vor. Von vornherein wird man erwarten, daß hier ähnliche Verhältnisse vorliegen, wie bei der ersten Randwertaufgabe bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, daß also die Aufgabe nicht immer eine Lösung besitzt. Wir können auch mit Hilfe der uns zur Verfügung stehenden Methoden fast unmittelbar einen vollen Einblick in die Verhältnisse gewinnen. Nach den Schlußbetrachtungen des vorigen Paragraphen genügt nämlich eine am Rande eines Bereiches B verschwindende Lösung von

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{13}$$

der linearen homogenen Integralgleichung[1])

$$u(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_B G(x, y, \xi, \eta)\, u(x, y)\, dx\, dy. \tag{13'}$$

Aus deren uns von S. 166 bekannten Theorie folgt aber der volle Aufschluß über unser Randwertproblem. Daß damals alles für einfache Integrale ausgesprochen wurde, macht keinen Unterschied aus. Alles bleibt unverändert bestehen, auch für Doppelintegrale, welche über beliebige Bereiche erstreckt werden. Zwar ist hier der Kern $G(x, y, \xi, \eta)$ nicht stetig, aber er ist quadratisch integrierbar, d. h.

$$\iint_B \iint_B [G(x, y, \xi, \eta)]^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

konvergiert, und daher bleibt die damalige Theorie unverändert verwendbar. Somit folgt, daß nur für gewisse Werte des Parameters λ, die sogenannten *Eigenwerte*, das Problem lösbar ist. Daß diese Eigenwerte sämtlich positiv sind, ist von vornherein leicht einzusehen. Denn nehmen wir z. B. an, zu einem negativen Werte von λ gehöre eine Eigenfunktion, welche im Bereiche irgendwo ein positives Maximum besitze. Dann ist einmal nach den Regeln der Differentialrechnung in diesem Punkte $\Delta u \leqq 0$, andererseits aber wegen $\lambda < 0$ und $u > 0$ auch $\lambda u < 0$, so daß an dieser Stelle die Summe beider nicht Null sein könnte. Also sind alle Eigenwerte positiv. Diese Eigenwerte λ_k sind reell und häufen sich nirgends im Endlichen, ja sie sind so verteilt, daß $\sum \frac{1}{\lambda_k^2}$ konvergiert.

Zu jedem Eigenwert gehören endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen, und man darf annehmen, daß dieselben zueinander

[1]) Durch Differenzieren unter dem Doppelintegral kann man hieraus den Schluß ziehen, daß u zweimal stetig differenzierbar ist.

orthogonal sind. Ebenso sind die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen orthogonal, d. h. es ist

$$\iint_B \varphi_n(x, y)\,\varphi_m(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

und man hat den Entwicklungssatz, wonach man jede zweimal stetig differenzierbare, am Rande verschwindende Funktion in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln kann. Denn jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(x, y)$, welche am Bereichrand verschwindet, kann man mit Hilfe der *Green*schen Funktion, also des Kernes der Integralgleichung, so darstellen

$$\varphi(\xi, \eta) = -\iint_B G(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\,dx\,dy.$$

Dabei ist $f(x, y) = \Delta\varphi$ gesetzt.

Ich will nun diese Folgerungen aus der allgemeinen Theorie durch ein weiteres Eingehen auf die Besonderheiten der Differentialgleichung (13) noch etwas ergänzen.

Zunächst will ich auf das physikalische Problem hinweisen, dem diese Differentialgleichung entspringt. Es ist das Problem der Schwingungen einer Membran, die an ihrem Rande eingespannt ist. An sich werden diese Schwingungen durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\,\Delta z$$

beherrscht. Dabei ist c^2 eine von Spannungszustand und Material abhängige Konstante. Ähnlich wie S. 286 bei der schwingenden Saite führt der Ansatz

$$z = v(t)\,u(x, y)$$

zur Trennung der Variablen. Er liefert für $u(x, y)$ die Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} k\,u,$$

die also mit der hier betrachteten übereinstimmt.

Aus den hieraus gefundenen Einzellösungen setzt man, genau wie bei der schwingenden Saite, allgemeinere Lösungen additiv zusammen. Dem Entwicklungssatz entspricht wieder die Aufgabe, eine solche Lösung den Anfangsbedingungen anzupassen.

Des weiteren will ich in einem speziellen Fall die Lösungen des Problems wirklich angeben. Es sei der Fall der quadratischen Membran. Hier liegt es nahe, mit dem Ansatz $u = f(x) \cdot g(y)$ in die Gleichung (13) hineinzugehen, falls man annimmt, daß das Quadrat parallel zu den Koordinatenachsen orientiert ist.

Dadurch findet man für f und g die beiden Differentialgleichungen

$$f'' + a^2 f = 0, \quad g'' + b^2 g = 0, \quad \text{wo} \quad a^2 + b^2 = \lambda$$

und schließt so, daß diese Lösungen in Betracht kommen:

$$u = (c_1 \cos a x + c_2 \sin a x)(d_1 \cos b y + d_2 \sin b y).$$

Das Quadrat sei nun von den Geraden

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \pi, \quad y = \pi$$

begrenzt. Sollen dann die Lösungen am Rande des Quadrates verschwinden, so zeigt sich, daß allein noch

$$c \sin a x \sin b y \tag{14}$$

übrig bleibt und daß dabei $a = m$ und $b = n$ sein muß, wo m und n ganze Zahlen sind. Für λ kommen somit nur die Werte

$$\lambda_{m,n} = m^2 + n^2$$

in Betracht. Das sind die Eigenwerte. Freilich steht zunächst noch dahin, ob wir so alle Eigenwerte gefunden haben. Dies aber folgt sofort daraus, daß man willkürliche Funktionen nach unseren Eigenfunktionen (14) entwickeln kann. Ein solcher Entwicklungssatz gilt ja nur für das vollständige System aller Eigenfunktionen. Tatsächlich aber läßt sich ganz analog wie in der Theorie der *Fourier*schen Reihen beweisen, daß man jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x, y)$, welche am Rande des Quadrates verschwindet, in eine Reihe

$$f(x, y) = \sum c_{m,n} \sin m x \sin n y$$

entwickeln kann, deren Koeffizienten

$$c_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \sin m x \sin n y \, dx \, dy$$

sind. Wir finden hier auch bestatigt, daß verschiedene Eigenfunktionen zueinander orthogonal sind, denn es ist ja

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin m x \sin n y \sin k x \sin l y \, dx \, dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin m x \sin k x \, dx \cdot \int_0^{2\pi} \sin n y \sin l y \, dy = 0.$$

Zum gleichen Eigenwert $\lambda = m^2 + n^2$ gehören offenbar alle die Eigenfunktionen $\sin m x \sin n y$, für welche $\lambda = m^2 + n^2$ den gleichen Wert hat. Zur gleichen durch den Eigenwert bestimmten Schwingungsdauer gehören daher oft mehrere linear unabhängige Eigenfunktionen. Auch deren lineare Kombinationen gehören zur gleichen Schwingungsdauer. Sucht man diejenigen Stellen der Membran auf, für welche während der ganzen Schwingung Ruhe herrscht, also die Knotenlinien der Schwingung, so erhält man die in der Akustik unter dem Namen Klangfiguren bekannten Kurven, deren mannigfaches Aussehen also dem

Umstande entspringt, daß zu einem und demselben Eigenwert verschiedene Eigenfunktionen gehören können.

Ich wende mich nun wieder allgemeineren Fragen zu und stelle mir die Aufgabe, Aufschluß über die Verteilung der Eigenwerte und ihre Abhängigkeit vom Gebiet zu gewinnen. Es handelt sich also hier um die Übertragung derjenigen Ergebnisse, welche wir früher anläßlich des Oszillationstheorems über die Verteilung der Eigenwerte der Differentialgleichung $y'' + \lambda \varrho y = 0$ gewonnen hatten. Neuerdings sind in der uns hier beschäftigenden Frage durch Arbeiten von *Weyl*[1]) und *Courant*[2]) erhebliche Fortschritte erzielt worden, um deren Darstellung es sich hier handeln soll. Ich berichte über die von *Courant* entwickelte Methode der Variationsrechnung. Diese Beziehungen zu einem Variationsproblem beruhen auf dem folgenden Satz: *Denkt man sich die Eigenwerte der Größe nach geordnet, und dabei jeden Eigenwert seiner Vielfachheit*[3]) *nach aufgeschrieben* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$, *so ist der* n*-te Eigenwert* λ_n *der kleinste Wert, welchen das Integral* $D(\varphi, \varphi)$ *annehmen kann, wenn zum Vergleich alle in* B *stetigen und mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehenen am Rande verschwindenden Funktionen zugelassen werden, welche den weiteren Bedingungen*

$$\iint_B \varphi u_i \, dx \, dy = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{15}$$

$$\iint_B \varphi^2 \, dx \, dy = 1 \tag{16}$$

genügen. Die u_i *sind dabei die zu den* λ_i *gehörigen durch*

$$\iint_B u_i^2 \, dx \, dy = 1$$

normierten Eigenfunktionen, wobei also jetzt jedem λ_i *gerade eine Eigenfunktion zugeordnet ist. Das Minimum von* $D(\varphi, \varphi)$ *wird für die* n*-te Eigenfunktion* u_n *angenommen.*

Der Beweis dieser Tatsache gelingt so: Durch partielle Integration gewinnt man zunächst die Formel

$$D(\varphi, \varphi) = -\iint_B \varphi \, \Delta \varphi \, dx \, dy .$$

Wir bedienen uns nun der von S. 167 bekannten Vollständigkeitsrelation

$$\iint_B \varphi \, \Delta \varphi \, dx \, dy = \sum_i \iint_B \varphi u_i \, dx \, dy \cdot \iint_B \Delta \varphi \cdot u_i \, dx \, dy .$$

---

[1]) *H. Weyl:* Math. Annalen **71**, Crelles Journ. **141**, **143**.

[2]) *R. Courant:* Math. Zeitschr. **7**.

[3]) Das ist die Zahl der linear unabhängigen zu ihm gehörigen Eigenfunktionen. Daß diese Anzahl endlich ist, wird in der Theorie der Integralgleichungen bewiesen. Man vgl. (13′). Siehe z. B. *E. Schmidt,* Math. Ann. **63**, S. 445.

Nun ist aber wegen des Verschwindens von φ und u_i am Rande nach der *Green*schen Formel (1) von S. 289

$$\iint_B \Delta\varphi \cdot u_i \, dx\, dy = \iint_B \varphi \cdot \Delta u_i \, dx\, dy = -\lambda_i \iint_B \varphi u_i \, dx\, dy.$$

Somit wird

$$D(\varphi, \varphi) = \sum_i \lambda_i \{\iint_B \varphi u_i \, dx\, dy\}^2. \tag{17}$$

Nun ist aber nach der Vollständigkeitsrelation wegen (16)

$$1 = \iint_B \varphi^2 \, dx\, dy = \sum_i \{\iint_B \varphi u_i \, dx\, dy\}^2.$$

Weiter aber ist nach (15)

$$\iint_B \varphi u_i \, dx\, dy = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Daher wird

$$D(\varphi, \varphi) \geqq \lambda_n.$$

Das Gleichheitszeichen kann hierbei nur stehen, wenn in (17) nur diejenigen Integrale von Null verschieden sind, welche zu den λ_n gleichen Eigenwerten gehören. Dann ist aber wegen des Entwicklungssatzes φ eine der zugehörigen Eigenfunktionen, für die also allein das Minimum angenommen wird. *Courant* hat diese schon länger bekannte Extremaleigenschaft der Eigenfunktionen so umgestaltet, daß sie für die weiteren Schlüsse brauchbar wird. Sie krankt nämlich noch an dem Übelstand, daß man zur Charakterisierung der n-ten Eigenfunktion sich auf die Eigenfunktionen mit kleinerer Nummer beziehen muß. Zu dieser Umgestaltung gelangt man durch die folgenden Überlegungen. Statt der Nebenbedingungen (15), (16) wollen wir der Funktion φ die Zusatzbedingungen (16) und

$$\iint_B \varphi v_i \, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{18}$$

auferlegen. Dabei sollen die v_i irgendwelche in B stetige Funktionen sein. Für hiernach zulässige Funktionen φ besitzt das Integral $D(\varphi, \varphi)$ eine untere Grenze, welche von den $v_1 \ldots v_{n-1}$ abhängt und daher mit $d(v_1 \ldots v_{n-1})$ bezeichnet werden soll. Dann ist

$$d(v_1 \ldots v_{n-1}) \leqq \lambda_n = d(u_1 \ldots u_{n-1}).$$

Zum Beweise ist nur zu zeigen, daß man bei beliebiger Wahl der $v_1 \ldots v_{n-1}$, wofern diese nicht den $u_1 \ldots u_{n-1}$ gleich sind, eine Funktion φ bestimmen kann, für die $D(\varphi, \varphi) \leqq \lambda_n$ ist. Eine solche Funktion φ kann man z. B. als lineare Verbindung $c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$ der u_i herstellen. Denn die ihr aufzuerlegenden Bedingungen (18) und (16) bedeuten $n-1$ lineare homogene Gleichungen für die c_i nebst der Gleichung $\sum c_i^2 = 1$. Dem kann man aber durch passende c_i stets genügen. Diese Funktion verschwindet auch am Rande und ist wie

die Eigenfunktionen zweimal stetig differenzierbar. Für sie wird aber nach (17)

$$D(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2.$$

Also ist $D(\varphi, \varphi) \leqq \lambda_n$ wegen $\lambda_i \leqq \lambda_{i+1}$. Somit haben wir den folgenden Satz: *Es seien* $v_1 \dots v_{n-1}$ *in* B *stetige Funktionen, und* $d(v_1 \dots v_{n-1})$ *sei die untere Grenze der Werte, welche* $D(\varphi, \varphi)$ *annimmt, wenn* φ *irgendeine in* B *zweimal stetig differenzierbare am Rande verschwindende Funktion ist, welche den Bedingungen* (16) (18) *genügt. Dann ist* λ_n *gleich dem Maximum, welches* $d(v_1 \dots v_{n-1})$ *bei beliebiger Wahl der* $v_1 \dots v_{n-1}$ *annehmen kann. Das Maximum wird erreicht für* $v_1 = u_1, \dots v_{n-1}, = u_{n-1}, \varphi = u_n$.

In diesem Satz kann man die Voraussetzungen noch ein wenig erweitern. Nach einer in der Variationsrechnung viel verwandten Schlußweise kann man nämlich eine jede stetige abteilungsweise stetig differenzierbare Funktion samt ihrem Integral durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion beliebig genau approximieren, und daraus ergibt sich natürlich die Gültigkeit des Satzes auch für solche Funktionenklassen φ, die zwar stetig, aber nur einmal abteilungsweise stetig differenzierbar sind.

Diesen Satz koppelt man nun nach *Courant* mit folgendem allgemeinen Prinzip. Man stelle sich vor, daß man zur Konkurrenz nur solche Funktionen zuläßt, welche außer den ihnen bisher auferlegten Bedingungen noch einigen weiteren genügen, also mit anderen Worten: innerhalb einer engeren Klasse von Funktionen φ wird das Maximum jener unteren Grenze gesucht. Für eine engere Funktionenklasse kann aber die untere Grenze nicht kleiner sein als für die weitere Funktionenklasse, und daher kann das Maximum der unteren Grenze nicht abnehmen. Ebenso nimmt das Maximum der unteren Grenze nicht zu, wenn die Konkurrenzbedingungen für φ erleichtert werden.

Aus diesen Betrachtungen kann man nun z. B. den Schluß ziehen, daß *bei Vergrößerung des Gebietes die Eigenwerte nicht zunehmen.* Betrachtet man nämlich zwei Gebiete B_1 und B_2, von denen das zweite ein Teil des ersten sein möge. Dann können die in B_2 zweimal stetig differenzierbaren Funktionen φ, welche am Rande von B_2 verschwinden, offenbar aufgefaßt werden als Funktionen, welche in dem größeren Gebiete B_1 abteilungsweise stetig differenzierbar sind, dazu aber am Rande von B_2 und in dem nicht zu B_2 gehörigen Teile von B_1 verschwinden. Das ist also eine engere Funktionenklasse als die zur Definition der Eigenwerte für B_1 benutzte. Daher sind die Eigenwerte des kleineren Gebietes sicher nicht kleiner als die Eigenwerte des größeren. Genauer: *der* n*-te Eigenwert des kleineren Gebietes ist nicht kleiner als der* n*-te Eigenwert des größeren Gebietes.*

Man kann diesen Schluß leicht verallgemeinern für den Fall, daß jenes Teilgebiet von B_1 nicht aus einem Stücke, sondern aus mehreren punktfremden Teilgebieten von B_1 besteht. Für dieses aus mehreren Teilen bestehende Gebiet erhält man aber die Eigenwerte als Gesamtheit der Eigenwerte der einzelnen Teilgebiete. Somit ist der n-te Eigenwert des großen Gebietes nicht größer als die n-te Zahl in der Reihe der der Größe nach geordneten Eigenwerte der Teilgebiete.

Andersgewendet kann man sagen: Die Anzahl der unterhalb einer Schranke λ liegenden Eigenwerte von B ist nicht kleiner als die Summe der entsprechenden Anzahlen für die Teilgebiete.

Wir schließen die Feststellung an, daß der n-te Eigenwert sich stetig mit dem Gebiete ändert. Dabei wird unter einer „Gebietsänderung unter ε" eine Abbildung

$$x' = x + g(x, y),$$
$$y' = y + h(x, y)$$

des Gebietes B auf ein anderes B' verstanden, die jeden Punkt um weniger als ε aus seiner Lage verschiebt und bei der sich die ersten Ableitungen von g und h von den ersten Ableitungen von x und y selbst um weniger als ε unterscheiden. Dabei unterscheidet sich also die Funktionaldeterminante der Abbildung von 1 um weniger als eine mit ε gegen Null strebende Zahl $o(1)$[1]). Jede in B erklärte Funktion geht bei der Abbildung in eine in B' erklärte über, und das *Dirichlet*sche Integral der in B erklärten Funktion φ unterscheidet sich von dem *Dirichlet*schen Integral der in B' erklärten transformierten Funktion φ nur durch einen Faktor, der nach 1 strebt, wenn $\varepsilon \to 0$ konvergiert. Wenn nämlich M die Funktionaldeterminante bedeutet, so wird

$$D_B(\varphi, \varphi) = \iint_{B'} \left[\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial h}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y}\right) \right\}^2 \right] \frac{dx'\,dy'}{M}$$

$$(M = (1 + g_x)(1 + h_y) - g_y h_x).$$

Also

$$D_B(\varphi, \varphi) = (1 + o(1)) \iint_{B'} \left[\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right\}^2 \right] dx'\,dy' + o(1) \iint_{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\, dx'\,dy'$$

$$= (1 + o(1))\, D_{B'}(\varphi, \varphi) + o(1) \iint_{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\, dx'\,dy'.$$

Nun ist aber

$$2 \iint_{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\, dx'\,dy' \leqq D_{B'}(\varphi, \varphi).$$

---

[1]) Damit soll immer eine mit ε gegen Null strebende Zahl bezeichnet werden.

Also

$$D_B(\varphi, \varphi) = (1 + o(1))\, D_{B'}(\varphi, \varphi).$$

Ferner wird bei der Transformation

$$\iint_B \varphi^2\, dx\, dy = \iint_{B'} \varphi^2 \frac{dx'\, dy'}{M},$$

$$\iint_B \varphi\, v_i\, dx\, dy = \iint_{B'} \varphi\, v_i \frac{dx'\, dy'}{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Nun ersetze man die Funktionen v_i durch $v_i M^{-1} = v_i'$ und multipliziere φ mit einem für ε wenig von 1 verschiedenen *konstanten* Faktor — so entstehe φ' — daß wieder

$$\iint_{B'} \varphi'^2\, dx'\, dy' = 1,$$

$$\iint_{B'} \varphi'\, v_i'\, dx'\, dy' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gilt, so wird

$$D_B(\varphi, \varphi) = (1 + o(1))\, D_{B'}(\varphi', \varphi').$$

Da nun aber weiter mit den v_i auch die v_i' alle möglichen Funktionensysteme durchlaufen, so kann sich das Maximum der unteren Grenze der rechten Seite von dem der linken nur um einen Faktor unterscheiden, der nach 1 strebt, wenn $\varepsilon \to 0$ rückt. Damit ist die stetige Änderung der Eigenwerte mit dem Gebiet erkannt.

Die gewonnenen Ergebnisse werden wir nun für die Frage einer Abschätzung des n-ten Eigenwertes dadurch ausnützen, daß wir das Gebiet durch andere, bequemer zugängliche approximieren. Als solche bieten sich Quadratpackungen dar. Wir werden nämlich jetzt gleich sehen, daß man für solche aus aneinandergelegten Quadraten aufgebaute Bereiche die Eigenwerte leicht abschätzen kann.

Vorher muß indessen noch auf einige Verallgemeinerungen hingewiesen werden, deren Beweise den hier vorgeführten durchaus analog sind. Diese Verallgemeinerungen beziehen sich auf etwas andere Randwertprobleme. Das sind einmal die zweite Randwertaufgabe, bei der das Verschwinden der Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ am Rande gefordert wird und zweitens die beide umfassende dritte Randwertaufgabe, bei der $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ am Rande gefordert wird. Dabei ist σ eine am Rande stückweise stetige Funktion. Die k-ten Eigenwerte können auch bei diesen allgemeineren Problemen ganz analog durch Extremaleigenschaften charakterisiert werden. Die betreffenden Sätze lauten ganz analog wie die hier bewiesenen, nur daß der Funktion φ stets die betreffende Randbedingung aufzuerlegen ist. Bei der zweiten Randwertaufgabe handelt es sich auch nach wie vor um das Variations-

problem $D(\varphi, \varphi) = \text{Min}$. Bei der dritten jedoch tritt statt dessen das Variationsproblem

$$D(\varphi, \varphi) + \int_{\text{Rand}} \sigma \varphi^2 \, ds = \text{Min}$$

auf. Für die zweite und die dritte Randwertaufgabe ist noch ein Zusatz von Interesse und Wichtigkeit. *Man kann statt der den Randbedingungen genügenden Funktionen beliebige nur den anderen vorgeschriebenen Bedingungen genügende Funktionen nehmen. Bei der Extremalfunktion stellt sich dann die betreffende Randbedingung von selbst ein.* Man kann nämlich eine jede keiner Randbedingung unterworfene Funktion φ und gleichzeitig ihr $D(\varphi, \varphi)$ beliebig genau vermittelst einer der Randbedingung genügenden approximieren.

Zunächst überlegen wir uns parallel zu den früheren Ausführungen einiges über die Abhängigkeit der Eigenwerte der zweiten Randwertaufgabe vom Gebiet, soweit wir dessen später benötigen. Das Gebiet B werde durch gewisse *Jordan*-Kurven in eine Anzahl Teilgebiete B_i zerlegt. Dann ist der n-te Eigenwert λ_n' der zweiten Randwertaufgabe des ganzen Gebietes nicht kleiner als der n-te Wert in der Reihe der der Größe nach geordneten entsprechenden Eigenwerte aller dieser Teilgebiete. Während bei der Bestimmung von λ_n' den Vergleichsfunktionen keinerlei Bedingung vorgeschrieben, aber die Stetigkeit in B verlangt wird, lasse man jetzt zum Vergleich alle Funktionen zu, die zwar in den Teilgebieten B_i stetig und abteilungsweise stetig differenzierbar sind, die aber beim Übergang von einem Teilgebiet in ein benachbartes einen Sprung erleiden dürfen. Das zu diesem erweiterten Bereich von Vergleichsfunktionen gehörige Maximum der unteren Grenze sei λ_n''. Dann ist jedenfalls $\lambda_n'' \leqq \lambda_n'$. Diese Zahl erweist sich leicht als die n-te Zahl in der Reihe der Eigenwerte der B_i. Sie ist also nicht größer als der n-te Eigenwert des Gesamtgebietes B. Das Ergebnis kann man auch so aussprechen: $A_1^*(\lambda) + \ldots + A_\nu^*(\lambda) \geqq A(\lambda)$. Hier ist $A_k^*(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte der zweiten Randwertaufgabe von B_k, welche unter λ liegen. ν ist die Zahl der Teilgebiete.

Was weiter die stetige Abhängigkeit der Eigenwerte vom Gebiet anlangt, so muß man bei der Übertragung dieses Satzes auf die allgemeineren Randwertaufgaben dafür Sorge tragen, daß die Randkurven der approximierenden Gebiete sich auch in ihren Richtungen approximieren. Dann läßt sich der Satz wieder übertragen.

Wir sind nun auch imstande, die zu verschiedenen Randwertproblemen gehörigen n-ten Eigenwerte ihrer Größe nach miteinander zu vergleichen. Hier gilt der Satz, daß *der n-te Eigenwert λ_n der ersten Randwertaufgabe nie kleiner ist als der n-te λ_n' der zweiten und daß bei nichtnegativem σ der n-te Eigenwert der dritten immer zwischen beiden liegt.* Hiervon will ich nur den auf die erste und die zweite Randwertaufgabe sich beziehenden Teil beweisen, wiewohl sich auch

der Rest der Behauptung äußerst einfach ergibt. Man nehme ein Teilgebiet B' von B und λ_n' sei sein n-ter auf die erste Randwertaufgabe bezüglicher Eigenwert. In dem Extremalproblem nun, welches den n-ten Eigenwert k_n der zweiten Randwertaufgabe charakterisiert, werde der Funktion φ die zweite Bedingung auferlegt, in B außerhalb von B' zu verschwinden. Dadurch wird das zugehörige Extremum nicht verkleinert. Es ist aber mit dem Eigenwert λ_n' identisch, der sich also als nicht kleiner wie k_n erweist. Wenn man nun das Gebiet B' hinreichend wenig von B verschieden wählt, so ist auch λ_n' von λ_n beliebig wenig verschieden. Also ist auch dieser n-te Eigenwert von B bei der ersten Randwertaufgabe nicht kleiner als der n-te Eigenwert von B bei der zweiten Randwertaufgabe. Ist $A(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte der ersten Randwertaufgabe unter λ, $A^*(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte der zweiten Randwertaufgabe unter λ, so kann man das Ergebnis durch $A(\lambda) \leqq A^*(\lambda)$ ausdrücken.

Nun sind wir gerüstet, um zur Abschätzung der Eigenwerte zu schreiten.

Wir hatten schon auf S. 301 die zur ersten Randwertaufgabe gehörigen Eigenfunktionen des Quadrates von der Kantenlänge 1 bestimmt. Durch ganz analoge Betrachtungen würden wir bei einem Quadrat der Kantenlänge a die $\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}$ als Eigenfunktionen und die Zahlen $\frac{\pi^2}{a^2}(l^2+m^2)$, $l, m = 1, 2, 3 \ldots$ als Eigenwerte finden. Als Eigenfunktionen der zweiten Randwertaufgabe findet man auf dem gleichen Weg $\cos\frac{l\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a}$, und $\frac{\pi^2}{a^2}(l^2+m^2)$, $l, m = 0, 1, 2 \ldots$ sind die zugehörigen Eigenwerte. Die Zahl der Eigenwerte, die kleiner als λ sind, ist also mit der Zahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$l^2 + m^2 < \lambda \frac{a^2}{\pi^2}$$

identisch. Dabei sind bei der ersten Randwertaufgabe nur solche Lösungen zu nehmen, deren ganze Zahlen beide größer als Null sind. Bei der zweiten Randwertaufgabe sind dagegen alle nichtnegativen Werte zu nehmen. Somit sei $A(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte unter λ bei der ersten, $A^*(\lambda)$ die entsprechende Zahl bei der zweiten Randwertaufgabe. Diese Anzahlen kann man leicht schätzungsweise bestimmen. Man findet

$$A(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta c a\sqrt{\lambda} \quad \text{und} \quad A^*(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi}\lambda + \vartheta' c a\sqrt{\lambda}.$$

Dabei ist c eine von a und λ unabhängige Zahl, ϑ und ϑ' liegen zwischen -1 und $+1$. Das erkennt man etwa so: Man denke sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Geraden parallel zu den Koordinatenachsen gezeichnet, welche diese Achsen in ganzzahligen

Punkten treffen. Die Schnittpunkte dieser Geraden sind die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Wir wollen sie üblicherweise Gitterpunkte nennen. Die Frage ist nun, wieviele Gitterpunkte innerhalb des ersten Quadranten im Kreise vom Radius $\lambda \frac{a^2}{\pi^2}$ liegen, und je nachdem, ob es sich um $A^*(\lambda)$ handelt oder um $A(\lambda)$, sind die am Rande des Quadranten gelegenen Gitterpunkte mitzuzählen oder nicht. Betrachten wir erst den Fall $A^*(\lambda)$. Die Anzahl ist kleiner als der vierte Teil aller im Kreise gelegenen Gitterpunkte. Diese Anzahl ist nun aber gleich der Anzahl derjenigen Gitterquadrate, welche ganz dem Kreisinneren angehören. Diese Anzahl ist aber gleich dem Kreisinhalt vermindert um die Anzahl derjenigen Quadrate, welche Punkte mit der Kreisperipherie gemein haben. Diese Anzahl ist aber höchstens gleich dem Kreisumfang dividiert durch die Kantenlänge des Quadrates, die aber hier Eins ist. Daraus fließt sofort die für $A^*(\lambda)$ angegebene Formel. Im Falle $A(\lambda)$ sind außerdem noch die auf den Koordinatenachsen gelegenen Gitterpunkte abzuziehen, deren Anzahl aber höchstens dem Radius des Kreises gleich ist und das gibt wieder nur eine Anzahl von der Größenordnung $a\sqrt{\lambda}$. So folgt auch die für $A(\lambda)$ gegebene Formel.

Nun betrachten wir ein Gebiet, das aus endlich vielen Quadraten der Kantenlänge a aufgebaut ist. Diese Quadrate seien Q_ν und $A_{Q_\nu}(\lambda)$ und $A^*_{Q_\nu}(\lambda)$ seien die zugehörigen Anzahlen. Dann folgt zunächst aus unseren Sätzen über die Beziehung zwischen den Eigenwerten der Teilgebiete zu den Eigenwerten des Gesamtgebietes, daß

$$A_{Q_1}(\lambda) + \ldots + A_{Q_n}(\lambda) \leqq A(\lambda)$$

und daß

$$A^*_{Q_1}(\lambda) + \ldots + A^*_{Q_n}(\lambda) \geqq A^*(\lambda).$$

Andererseits folgt aber nach S. 307, daß $A(\lambda) \leqq A^*(\lambda)$. Also haben wir

$$A_{Q_1}(\lambda) + \ldots + A_{Q_n}(\lambda) \leqq A(\lambda) \leqq A^*_{Q_1}(\lambda) + \ldots + A^*_{Q_n}(\lambda).$$

Daraus folgt aber sofort

$$A(\lambda) = \frac{f}{4\pi}\lambda + \Theta C a \sqrt{\lambda}.$$

Hier ist f der Flächeninhalt des Gebietes, C wieder eine feste von a und λ unabhängige Zahl. Θ aber liegt zwischen -1 und $+1$.

Denkt man nun daran zurück, daß die Eigenwerte stetig vom Gebiete abhängen und daß man jedes Gebiet durch eine Quadratpackung approximieren kann, so ergibt sich für jedes Gebiet vom Inhalt f bei der ersten Randwertaufgabe

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \frac{f}{4\pi}.$$

Ich führe die zum scharfen Beweis nötigen Betrachtungen nicht näher durch. Bemerkenswert ist nur noch, daß diese asymptotische Formel unverändert auch für die Eigenwerte der beiden anderen Randwertaufgaben gilt, daß sich also im asymptotischen Verhalten der Eigenwerte die verschiedenen Randwertaufgaben gar nicht unterscheiden.

§ 4. Verallgemeinerungen.

Die im Vorstehenden gewonnenen Ergebnisse sind in vieler Beziehung typisch. Man kann sie zu erweitern suchen entweder durch Verallgemeinerung der zugrunde gelegten elliptischen Differentialgleichung, aus der wir ja immer die Glieder mit den ersten Ableitungen weggelassen haben. Ferner sind Verallgemeinerungen möglich durch Heranziehung allgemeiner Bereiche, da wir uns ja bisher wesentlich auf einfach zusammenhängende beschränkt haben. Endlich kann man an die Betrachtung allgemeinerer Randwertprobleme herantreten. Wir haben uns ja im allgemeinen auf das erste beschränkt und nur gelegentlich andere erwähnt. Die Ergebnisse, die sich in diesen anderen Fällen erzielen lassen, sind mutatis mutandis die gleichen, wie wir sie in unseren Fällen gewonnen haben. Methodisch verlangen die allgemeineren Probleme manch anderes Hilfsmittel. Sukzessive Approximationen führen nur in gewissen Fällen, z. B. bei genügend kleinen Bereichen, zum Ziel. Zugkräftiger ist diese Methode bei gewissen nichtlinearen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, aus denen ich z. B. die vielbehandelte $\Delta u = e^u$ nennen möchte. Das alternierende Verfahren bleibt gleichfalls anwendbar. Aber erschwert wird immer alles durch die Möglichkeit, daß gerade für die vorgelegte Differentialgleichung das betreffende Randwertproblem nicht lösbar ist. Das hängt mit den Eigenwerten zusammen, die man erhält, wenn man in die Differentialgleichung noch einen Parameter einführt. Die Theorie der Integralgleichungen oder die Methode der unendlich vielen Variablen führt hier überall zum Ziel, sobald man sich nur in diesen allgemeineren Fällen ein Fundament geschaffen hat, das in der direkten Behandlung einer Differentialgleichung vom Typus

$$L(u) \equiv \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

besteht. Hier ist die erste Randwertaufgabe genau wie bei $\Delta u = 0$ stets lösbar, man erhält eine *Green*sche Funktion und kann dann an die allgemeinere Differentialgleichung

$$L(u) + cu + d = 0$$

beispielsweise mit der Methode der Integralgleichungen erfolgreich herangehen. Der allgemeinste Satz, den man bisher für $L(u) = 0$ erhalten hat, ist dieser: Vorgelegt sei ein beschränkter irgendwie — nur

niemals durch einzelne isolierte Punkte[1]) — begrenzter Bereich B. In einem Kreise, der diesen Bereich umfaßt, sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(x, y)$ gegeben, die also am Rande des Bereiches B gewisse Werte annimmt. Dann besitzt die Gleichung $L(u) = 0$ genau eine im Bereiche B zweimal stetig differenzierbare Lösung, die im Bereiche und an seinem Rande stetig ist und am Rande mit der gegebenen φ übereinstimmt. Man verdankt dies Ergebnis wesentlich *Lebesgue* und *Lichtenstein* (vgl. z. B. des letzteren zusammenfassende Darstellung in Bd. 15 der Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft).

Für die zweite und dritte Randwertaufgabe läßt sich bei der Differentialgleichung $L(u) = 0$ kein ganz so glattes Ergebnis aussprechen, weil für sie schon das Problem unlösbar sein kann. Statt dessen ist es dann natürlich für jede zugehörige inhomogene Gleichung lösbar, wie das ja zu erwarten ist.

IV. Kapitel.

Parabolische Differentialgleichungen.

§ 1. Existenz und Unität der Lösungen.

Die Theorie der parabolischen Differentialgleichungen ist bei weitem nicht so durchgearbeitet und entwickelt, wie die der hyperbolischen oder die der elliptischen. Schon bei den einfachsten Fragen der Existenz und Unität stößt man auf unerledigte Probleme. Ich will mich im folgenden damit begnügen, an Hand der Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung einen Einblick in die Verhält-

---

[1]) Z. B. gibt es keine in $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ reguläre Potentialfunktion, die in diesem Kreis stetig ist, für $x^2 + y^2 = 1$ den Wert Eins hat und die für $x = y = 0$ verschwindet. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehörte dann nämlich ein $r_0(\varepsilon)$, so daß die Funktion für $x^2 + y^2 = r_0^2$ einen Betrag unter ε hätte. Daher wäre sie in dem Ring $r_0^2 < x^2 + y^2 < 1$ kleiner als die Potentialfunktion

$$\frac{\log \frac{r_0}{r} + \eta \log r_0}{(1+\eta)\log r_0}, \text{ wo } \frac{\eta}{1+\eta} = \varepsilon$$

und größer als die Potentialfunktion

$$\frac{\log \frac{r_0}{r} - \sigma \log r_0}{(1-\sigma)\log r_0}, \text{ wo } \frac{-\sigma}{1-\sigma} = \varepsilon.$$

Beide haben auf $x^2 + y^2 = 1$ den Wert 1. Auf $x^2 + y^2 = r_0^2$ hat die erste den Wert ε, die zweite den Wert $-\varepsilon$. Für $\varepsilon \to 0$ gilt $r_0 \to 0$. Für jedes $r \neq 1$ streben aber beide Funktionen nach Null. Also muß auch die zwischen beiden gelegene gesuchte Potentialfunktion an jedem inneren Punkte des Bereiches verschwinden.

nisse zu geben. Es ist dabei keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

zugrunde lege. Charakteristiken sind jetzt die Geraden $t =$ konst. Die Analogie der hyperbolischen Differentialgleichungen legt die folgende Frage nahe: Man betrachte einen Bereich B, wie ihn Fig. 18 zeigt. Er ist außer durch eine Charakteristik noch durch einen Kurvenbogen L begrenzt. Nach den allgemeinen Existenzsätzen ist eine Lösung der Gleichung (1) jedenfalls bestimmt, wenn man einen nichtcharakteristischen Anfangsstreifen vorgibt. Die Lösung muß also bestimmt sein, wenn man längs L die Werte von u und von $\frac{\partial u}{\partial x}$ vorschreibt. Zunächst will ich auf einen merkwürdigen Umstand hinweisen, welcher der Stellung der parabolischen Differentialgleichung zwischen den hyperbolischen und den elliptischen entspricht: Es reichen nämlich manchmal die Werte von u selbst längs der Kurve hin, um die Lösung zu bestimmen, falls man noch die Zusatzforderung stellt, daß sie in dem von der Kurve L und der Charakteristik begrenzten Bereiche zweimal stetig differenzierbar sein soll. Auf der Charakteristik hat man also ebensowenig wie bei den elliptischen Gleichungen etwas vorzuschreiben. Dort sind ja auch die Charakteristiken imaginär. Allerdings ist die Lösung durch ihre Werte auf L nur in einem besonderen Fall bestimmt, nämlich dann, wenn die Kurve wie in der Figur *links* von der Charakteristik liegt. Liegt sie rechts, so ist die Lösung nicht bestimmt. Nach *Volterra*, dem man diese Bemerkung verdankt, beweist man die Unität der Lösung im ersten Falle (Fig. 18) folgendermaßen. Man nehme an, es gäbe zwei Lösungen, die im Bereiche regulär sind und auf L die gleichen Werte haben. Dann verschwindet ihre Differenz u auf L und genügt im Bereiche der Gleichung (1). Demnach ist

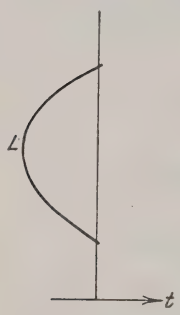

Fig. 18.

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_B u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx\,dt \\
&= \iint_B \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} \right\} dx\,dt - \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx\,dt \\
&= - \int_{\text{Rand}} u \frac{\partial u}{\partial x} dt - \frac{1}{2} \int_{\text{Rand}} u^2 dx - \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx\,dt \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\uparrow} u^2 dx - \iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx\,dt .
\end{aligned}$$

Daher muß $u = 0$ sein auf der Charakteristik und $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ im Bereiche. Also ist $u = 0$ im Bereiche.

Anders im zweiten Falle. Dann erscheinen die obigen Randintegrale mit entgegengesetzten Vorzeichen, und man kann daher nicht den gleichen Schluß ziehen. Betrachten wir z. B. die Lösung

$$u = \cos x\, e^{-t} - \tfrac{1}{2} \cos 2x\, e^{-4t}$$

der Gleichung (1). Sie verschwindet auf der Kurve

$$t = \frac{1}{3} \log \frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

Sie ist in der schematischen Fig. 19 als Kurve L zur Anschauung gebracht.

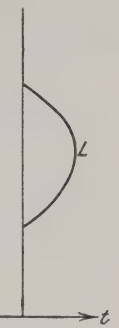

Fig. 19.

In den physikalischen Problemen der Wärmeleitung sind es andere Randwertprobleme, die im Vordergrund des Interesses stehen. Dort handelt es sich um die Wärmeleitung in einem längs der x-Achse erstreckten linearen Leiter. In diesem Leiter ist $u = f(x)$ für $t = 0$ vorgeschrieben.

Handelt es sich außerdem um einen bei $x = 0$ und $x = l$ begrenzten Leiter, so ist weiter noch der Wärmezustand an den Enden für alle Zeiten vorgeschrieben, also z. B. $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(l, t) = \psi(t)$. Durch diese Anfangsbedingungen ist im begrenzten Leiter die Lösung eindeutig bestimmt. Ob es stets eine den Bedingungen genügende Lösung gibt, soll uns hernach erst, im Anschluß an die Methoden zu ihrer wirklichen Aufstellung beschäftigen. Hier soll nur erst die Unität der Lösung erörtert werden. Man beweist sie folgendermaßen: Gäbe es zwei Lösungen gleicher Anfangs- nnd Randbedingungen, so wäre auch die Differenz eine Lösung, welche nun an den Leiterenden für alle Zeiten verschwindet und welche auch für $t = 0$ verschwindet. Diese Differenzlösung werde mit u bezeichnet. Man betrachte das Integral

$$J(t) = \int_0^l \frac{u^2}{2}\, dx. \tag{2}$$

Dann wird

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^l u \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \int_0^l u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx$$

$$= u \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^l - \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = - \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Demnach ist $\frac{dJ}{dt} \leqq 0$ und weil $J(0) = 0$ ist, so wäre $J \leqq 0$. Nach Formel (2) ist aber $J \geqq 0$. Also muß $J = 0$ sein. Also ist $u = 0$.

§ 2. Der lineare begrenzte Leiter.

Ähnlich wie bei der schwingenden Saite bedient man sich am besten der Methode der Partikularlösungen, um in dem letztbehandelten Randwertproblem neben einem Beweis für die Existenz der Lösung auch diese selbst sofort zu gewinnen. Gehen wir nämlich wieder mit dem Ansatz

$$u = v(x)\, w(t)$$

in die Gleichung (1) hinein, so erhalten wir

$$\frac{v''}{v} = \frac{w'}{w}$$

und daher muß es eine Konstante λ geben, so daß

$$v'' + \lambda v = 0,$$
$$w' + \lambda w = 0$$

ist. Somit sind die Funktionen

$$u = (a_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + a_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x) e^{-\lambda t}$$

Lösungen. Sollen sie für $x = 0$ und für $x = l$ bei beliebigem t verschwinden, so muß $a_1 = 0$, $\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sein. Durch Addition erhält man neue Lösungen. Also sind

$$u(x, t) = \sum c_n \sin \frac{n \pi x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t}$$

Lösungen. Diese passe man nun dem Anfangszustand an. Für $t = 0$ sollte $u(x, 0) = f(x)$ sein. Das liefert die Gleichung

$$f(x) = \sum c_n \sin \frac{n \pi x}{l},$$

und wir haben wieder Anschluß an die Theorie der *Fourier*schen Reihen. Für stetige und stetig differenzierbare Funktionen z. B. ist also das Problem lösbar.

Wenn die Enden nicht ständig auf der Temperatur Null gehalten werden, sondern wenn etwa an dem Ende $x = 0$ die konstante Temperatur u_0 an dem Ende $x = l$ die konstante Temperatur u_1 vorgeschrieben ist, so führt der Gedanke, daß sich nach hinreichend langer Zeit eine proportionale Temperaturverteilung einstellen wird, dazu, die Lösung in der Form

$$u = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0) + v$$

anzusetzen. Da aber, wie man sofort sieht,

$$u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0)$$

selbst eine Lösung ist, so genügt v der gleichen Differentialgleichung und wir sind auf das gerade behandelte Problem zurückgekommen.

Diese Methode der Partikularlösungen führt auch noch in vielen anderen Fällen zum Ziel und ist z. B. auch bei der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - q\,u = 0$$

verwendbar. Ich will das aber nicht weiter verfolgen.

§ 3. Der unbegrenzte Leiter.

Hier soll längs der ganzen unbegrenzten x-Achse eine Funktion $f(x)$ gegeben sein und es fragt sich, ob man stets eine Lösung von (1) finden kann, für die $u(x, 0) = f(x)$ ist, und weiter, ob diese Lösung eindeutig bestimmt ist. Für $f(x)$ wird man natürlich zum mindesten die Stetigkeit voraussetzen wollen. Obwohl dies Problem von physikalischer Seite viel behandelt worden ist, so ist doch die von dieser Seite gegebene Lösung vom mathematischen Standpunkt aus noch nicht voll befriedigend. Die Physiker bedienen sich einer Erweiterung der Methode der Partikularlösungen und schließen so: Die Funktion

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

genügt jedenfalls der Differentialgleichung. Daher ist auch

$$f(\xi) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

eine Lösung. Und daher genügt auch

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi$$

der Differentialgleichung. Tatsächlich kann man nun, wie ich hier nicht näher ausführen will, unter der Voraussetzung eines stetigen und beschränkten $f(x)$ beweisen, daß diese Funktion der Differentialgleichung genügt und daß für $t \to 0$ gilt

$$f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi .$$

Unser Problem wäre damit gelöst. Aber die Unität der Lösung, die man nach physikalischer Analogie vermuten möchte, bleibt unbewiesen und ist auch nach der im vorigen Paragraphen benutzten Methode

jedenfalls nicht ohne weitere Einschränkungen für die Anfangsfunktion $f(x)$ zu beweisen.

Ähnlich gelingt es auch, das im ersten Paragraphen schon erwähnte Problem der durch einen Anfangsstreifen bestimmten Lösung zu lösen. Wir knüpfen also wieder an den dort in Fig. 18 dargestellten Bereich an und werden zunächst eine *Green*sche Formel für den Bereich gewinnen. Wir bezeichnen

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

und nennen

$$\mathfrak{M}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

den adjungierten Differentialausdruck. Dann ist

$$\iint (v\,\mathfrak{L}(u) - u\,\mathfrak{M}(v))\,d\xi\,dt = \iint \left\{\frac{\partial}{\partial x}(v\,u_x - u\,v_x) - \frac{\partial (u\,v)}{\partial t}\right\} d\xi\,dt$$

$$= \int_{(L)} (v\,u_x - u\,v_x)\,dt + \int_{(L)} u\,v\,d\xi + \int_{\downarrow} u\,v\,d\xi .$$

Nun wähle man als u eine Lösung von $\mathfrak{L}(u) = 0$ und für v eine noch näher festzulegende Lösung von $\mathfrak{M}(v) = 0$. Dann wird

$$\int_{\uparrow} u\,v\,d\xi = \int_{(L)} (v\,u_x - u\,v_x)\,d\tau + \int_{(L)} u\,v\,d\xi .$$

Kann man nun die Lösung v so wählen, daß

$$\lim_{\tau \to t} \int_{\uparrow} u\,v\,d\xi = u(x, t) \tag{3}$$

wird, so gewinnen wir eine Formel, die unser Problem löst. Wir wählen nach den Erfahrungen zu Beginn dieses Paragraphen

$$v(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi (t - \tau)}}\, e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4\pi (t-\tau)}} .$$

Wirklich läßt sich dann bei stetiger Funktion $u(\xi, \tau) = f(\xi)$ (3) beweisen.

Daher finden wir

$$u(x, t) = \int_{(L)} (v\,u_x - u\,v_x)\,d\tau + \int_{(L)} u\,v\,d\xi .$$

Es fällt auf, daß hier auch die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ vorkommt, während doch im Falle der Fig. 18 die Lösung schon durch ihre Werte auf L bestimmt war. Aber unsere Formel gilt ja allgemein, also auch für den Fall der Fig. 19, wo die Kurve L rechts von der Charakteristik liegt.

Offen blieb bisher noch die Frage, ob man im Falle der Fig. 18 auf der Kurve L die Werte der Lösung als stetige Funktion beliebig vorschreiben kann, so daß dazu immer eine im Gebiete reguläre Lösung dieser Randwerte gehört. Ich füge an, daß der Beweis für

die Existenz dieser Lösung von *Holmgren* (Arkiv för matematik, Bd. 3, 4, 5) und von *E. E. Levi* (Annali di matematica, ser. 3, Bd. 14) erbracht wurde, unter Heranziehung von Hilfsmitteln aus der Theorie der Integralgleichungen.

Unsere Ausführungen werden einen unfertigen Eindruck hinterlassen. Das ist ihre Absicht und ich nehme es gern mit in Kauf, wenn ein unfertigerer Eindruck entsteht, als es dem heutigen Stand der Dinge vielleicht entspricht. Es mag noch manche erwähnenswerte Einzelheit geben. Aber es ist mir nur erwünscht, wenn meine Darstellung den Leser veranlaßt, sich an den Quellen noch näher zu orientieren und wenn er so weiter in diesen Gegenstand eindringt, der noch manchen Forscher beschäftigen kann. Übrigens wird auch ein anderes Buch dieser Sammlung die hier berührten Dinge wieder vornehmen.

Namenverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

Abel 294.
Ampère 273.

Bendixson 54, 62, 65, 66, 68, 72, 75, 77, 78, 79, 81, 82, 92.
Bernoulli 11, 22, 23, 24.
Bessel 161, 165, 183.
Birkhoff 81, 122, 126, 130, 135, 136, 139, 166, 178, 182, 197.
Bolza 135.
Bouquet 92, 98.
Boutroux 95.
Brauer 129.
Briot 92, 98.
Brouwer 63, 133.

Cauchy 39, 40, 41, 213, 269.
Charlier 139.
Clairaut 19, 83, 87, 88, 228, 248.
Courant 302.

Dirichlet 297.
Dulac 79, 92.

Emde 115.
Euler 23, 24, 39, 40, 41, 87, 241.

Fredholm 167.
Fuchs 94, 184, 187.

Goursat 262, 271, 275.
Green 150, 156, 158, 159, 161, 283, 289, 290, 291, 295, 298, 310.

Hamilton 232, 234.
Hermite 97.
Hilb 166, 182, 197.
Hilbert 167, 197, 297.
Holmgren 317.
Horn 92.

Jacobi 187.
Jahnke 115.
Jordan, C., 83, 295, 307.

v. Kerékjártó 133.
Klein 197.
Kutta 44, 46.

Lagrange 20.
Laplace 279.
Legendre 165, 239,
Lebesgue 311.
Levi, E. E., 317.
Lichtenstein 311.
Lie 25, 239, 257, 262.
Liouville 22, 23, 24, 156.
Lipschitz 25, 26, 29, 35, 49, 82, 87.

Malmquist 92, 95, 96, 97.
Mayer 224, 227.
Monge 273.

Painlevé 97, 169.
Peano 29.
Perron 29, 80, 81, 100, 181.
Picard 92, 94, 96, 106.
Poincaré 76, 78, 80, 92, 94, 106, 135, 166, 182.
Poisson 294, 295.

Riccati 23, 24, 94, 95, 97, 123, 169.
Riemann 98, 187, 197, 283, 287.
Runge 36.

Scheffers 25.
Schlesinger 175.
Schmidt, E., 167, 302.
Schwarz 296, 297.
Signorini 128.
Simpson 44.
Sturm 156.

Taylor 135.
Thomé 181.

Volterra 312.

Weierstrass 297.
Weyl 302.

Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

Adjungierter Differentialausdruck 281.
akzessorische Parameter 187.
allgemeines Integral 28.
automorphe Funktionen 195.

*Bernoulli*sche Differentialgleichung 11.
Berührungstransformation 236.
*Bessel*sche Differentialgleichung 161, 163.
— Funktion 163, 165.
bilineare Invariante 244.
Bilinearformel 161.

Charakteristik 263, 271.

*Dirichlet*sches Prinzip 297.

Eigenfunktionen 148, 299.
Eigenwerte 148, 299.
Elementeverein 239.
elliptische Differentialgleichung 278.
*Euler*sche Transformation 241.

Flächenelement 202.
Fundamentalgleichung 171.
Fundamentalsystem 118.

Gewöhnliche Differentialgleichung 1.
*Green*sche Formel 281, 289.
— Funktion 151, 291.
Grenzzykel 58.

Homogene Differentialgleichung 8, 11, 116.
hyperbolische Differentialgleichung 279.
hypergeometrische Differentialgleichung 187.
— Reihe 189.

*Jacobi*sche Polynome 197.

Integral einer Differentialgleichung 2.
Involution 219.
Isoklinen 29.

Kettenlinie 113.
Klammerausdruck 219.
Knotenpunkt 49.

*Lagrange*sche Differentialgleichung 22.
*Legendre*sche Polynome 165, 199.
lineare Differentialgleichung 10, 116, [278.
Linienelement 3.

Majorantenmethode 269.

Nebenpunkt 181.
Normalreihen 181.

Ordnung einer Differentialgleichung 1.
orthogonal 152.
Oszillationstheorem 148.

Parabolische Differentialgleichung 279.
partielle Differentialgleichung 1.
partikuläres Integral 29.
*Poisson*sches Integral 294.
Polygonmethode 39.

Randwertaufgabe 149, 292.
*Riccati*sche Differentialgleichung 23.
Richtungsfeld 2.
*Riemann*sches Problem 197.
*Runge-Kutta*sche Formel 44.

Sattelpunkt 50.
singuläre Stelle 31, 49, 56.
singuläre Lösung 83.
Stelle der Bestimmtheit 173.
Streifen 203.
Strudelpunkt 50.
*Sturm-Liouville*sche Differentialgleichung 156.

Trennung der Variablen 6, 229, 287.

Variation der Konstanten 11, 121.
vollständiges Integral 225.
Vollständigkeitsrelation 167.

Wirbelpunkt 50.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

34

Bieberbach
Theorie der Differential-
gleichungen

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY

UTL AT DOWNSVIEW
D RANGE BAY SHLF POS ITEM C